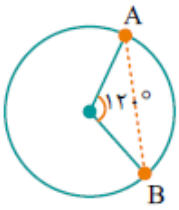
پاسخ آزمون)۵(ریاضی / تاریخ : ۱۴۰۳/۰۱/۰۳ به نام خدا تعداد سوال: ۵۰ / زمان : ۷۵ دقیقه

۱ در دایره روبه‌رو با شعاع r، اختلاف طول کمان AB و وتر AB، ۲ واحد است. اگر $\pi \simeq ۳/۱۵$ و $\sqrt{۳} \simeq ۱/۷$ باشد، r کدام است؟



۱) ۶
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۸

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۱۰۴)

بی‌مقدمه بریم به سراغ «تبدیل زوایا به یکدیگر»:

اگر زاویه‌ای برحسب درجه (D) یا رادیان (R) داده شده باشد و بخواهیم آن را به دیگری تبدیل کنیم، از فرمول زیر کمک می‌گیریم:

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}$$

«فرمول طول کمان دایره» که دیگه گفتن نداره!

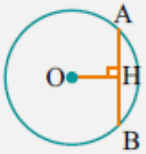
در دایره‌ای به شعاع R، طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی θ برابر است با:

$$\ell = R\theta$$

تذکر: دقت شود که θ باید حتماً برحسب رادیان باشد.

این نکته دیگه خیلی هندسی طور میشه...

پاره‌خط عبوری از مرکز دایره، بر وتر دایره، عمود است و آن را نصف می‌کند.



$$\begin{cases} AH = BH \\ A\hat{H}O = ۹۰^\circ \end{cases}$$

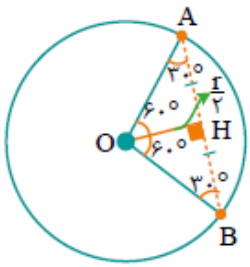
پاسخ تشریحی:

ابتدا طول کمان AB را محاسبه می‌کنیم. برای این کار زاویه ۱۲۰° را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{۱۲۰^\circ}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{۲\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AB} = r\theta = \frac{۲\pi}{۳}r \xrightarrow{\pi \simeq ۳/۱۵} \overset{\frown}{AB} = ۲/۱r$$

برای محاسبه طول وتر AB نیز، از مرکز دایره خطی بر آن عمود می‌کنیم تا آن را نصف کند. در این صورت، مثلث‌های $\overset{\triangle}{OAH}$ و $\overset{\triangle}{OBH}$ به حالت ض‌زض هم‌نهشت هستند و دو زاویه ۶۰° تشکیل خواهد شد. پس $\hat{B} = ۳۰^\circ$ خواهد بود و می‌دانیم ضلع روبه‌رو به زاویه ۳۰° نصف وتر است: $OH = \frac{r}{۲}$



$$\xrightarrow{\text{فیثاغورس}} BH = \sqrt{OB^۲ - OH^۲} = \sqrt{r^۲ - (\frac{r}{۲})^۲} = \sqrt{\frac{۳r^۲}{۴}} = \frac{\sqrt{۳}r}{۲} \xrightarrow{\sqrt{۳} \simeq ۱/۷} BH = ۰/۸۵r \Rightarrow AB = ۱/۷r$$

پس اختلاف طول کمان و وتر AB برابر است با:

$$۲/۱r - ۱/۷r = ۲ \Rightarrow ۰/۴r = ۲ \Rightarrow r = ۵$$

۲ اگر $\frac{\pi}{۶} < x \leq \frac{۳\pi}{۴}$ باشد و $\cos ۲x = \frac{۱}{۲m-۱}$، حدود m کدام است؟

۱) $(-\infty, ۰]$ ۲) $[\frac{۱}{۲}, +\infty)$ ۳) $[۰, \frac{۴}{۲})$ ۴) $\mathbb{R} - (۰, \frac{۳}{۲}]$

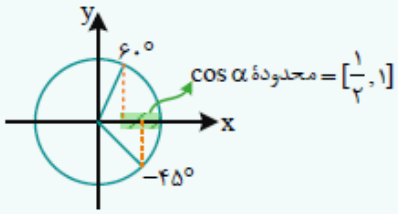
پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۰۰۲)

پردهٔ بعدی نمایش، «مشخص کردن محدودهٔ $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ با مشخص بودن خود زاویهٔ α»

برای این کار باید از دایرهٔ مثلثاتی کمک بگیریم، یعنی محدودهٔ α رو روی دایره مثلثاتی مشخص کرده، با توجه به دایرهٔ مثلثاتی، محدودهٔ نسبت مثلثاتی خواسته شده را به دست می‌آوریم.

مثال: اگر $-۴۵^\circ \leq \alpha \leq ۶۰^\circ$ باشد، محدودهٔ $\cos\alpha$ چقدر است؟

پاسخ: طبق دایرهٔ مثلثاتی داریم:

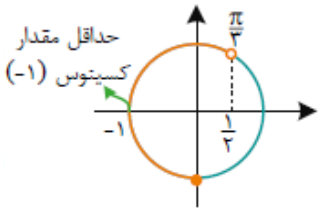


پاسخ تشریحی:

محدودهٔ $۲x$ را در دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم.

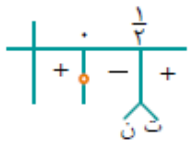
$$\frac{\pi}{۶} < x \leq \frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow \frac{\pi}{۳} < ۲x \leq \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow$$

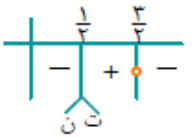
برای $\cos ۲x$ داریم:



$$\Rightarrow -۱ \leq \cos ۲x < \frac{۱}{۲} \Rightarrow -۱ \leq \frac{۱}{۲m-۱} < \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱}{۲m-۱} \geq -۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲m-۱} + ۱ \geq ۰ \\ \frac{۱}{۲m-۱} < \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲m-۱} - \frac{۱}{۲} < ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1+2m-1}{2m-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{2m}{2m-1} \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \Rightarrow x \leq 0 \text{ یا } x > \frac{1}{2} \quad (I) \\ \frac{2-2m+1}{4m-2} < 0 \Rightarrow \frac{3-2m}{4m-2} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \Rightarrow x < \frac{1}{2} \text{ یا } x > \frac{3}{2} \quad (II) \end{cases}$$





$$(I) \cap (II) \Rightarrow x \leq 0 \text{ یا } x > \frac{3}{2}$$

گروه آموزشی ماز

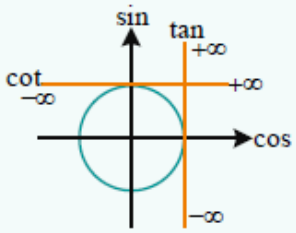
۳ اگر $\frac{4\pi}{9} < x < \frac{5\pi}{18}$ باشد، مقدار $\tan 3x$ در کدام بازه است؟

۱) $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ۲) $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ ۳) $(-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ ۴) $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3})$

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۲۰۲)

نظرتون در مورد «نحوهٔ نمایش تانژانت روی دایرهٔ مثلثاتی» چیه؟

محور sin، cos، tan، cot در دایرهٔ مثلثاتی زیر مشخص است.

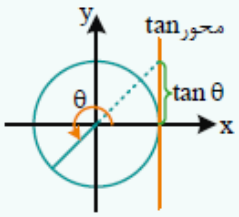


تذکر: روی دایرهٔ مثلثاتی، فقط مقادیر مربوط به محور tan و cot مشخص شده است.

مثال: $\tan \frac{4\pi}{3}$ را روی دایرهٔ مثلثاتی نشان دهید.

پاسخ: ابتدا زاویهٔ $\theta = \frac{4\pi}{3}$ را پیدا کرده، سپس تقاطع زاویه با محور tan را پیدا می‌کنیم.

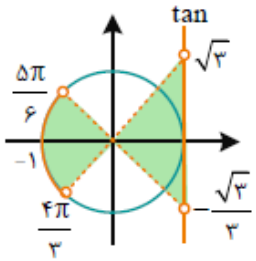
$\tan \frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}$ جواب می‌باشد.



پاسخ تشریحی:

ابتدا محدوده تغییرات $3x$ را می‌یابیم و سپس با دایره مثلثاتی، محدوده تانژانت را می‌یابیم:

$$\frac{5\pi}{18} < x < \frac{4\pi}{9} \Rightarrow \frac{5\pi}{6} < 3x < \frac{4\pi}{3}$$



همان‌طورکه از دایره مثلثاتی مشخص است، $\tan 3x$ در بازهٔ $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3})$ تغییر می‌کند.

۴ اگر $\tan ۳۶^\circ = \frac{۳}{۴}$ باشد، حاصل $\frac{۲\sin ۳۰۶^\circ + \cos ۲۱۶^\circ}{\sin ۵۴^\circ + ۲\sin ۳۲۴^\circ}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱۲ ۳) ۸ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۱۰۴)

«فرمول نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایای مهم» رو هم یاد بگیریم، بد نیست!

A: $\theta + ۲k\pi \xleftarrow{k\in\mathbb{Z}}$

$\sin(۲k\pi+\theta)=\sin\theta$ $\quad \cos(۲k\pi+\theta)=\cos\theta$

$\cot(۲k\pi+\theta)=\cot\theta$ $\quad \tan(۲k\pi+\theta)=\tan\theta$

B: $-\theta + ۲k\pi \xleftarrow{k\in\mathbb{Z}}$

$\sin(۲k\pi-\theta)=-\sin\theta$ $\quad \cos(۲k\pi-\theta)=\cos\theta$

$\cot(۲k\pi-\theta)=-\cot\theta$ $\quad \tan(۲k\pi-\theta)=-\tan\theta$

C: $\frac{\pi}{۲} - \theta \leftarrow$

$\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\cos\theta$ $\quad \cos(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\sin\theta$

$\cot(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\tan\theta$ $\quad \tan(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\cot\theta$

D: $\frac{۳\pi}{۲} + \theta \leftarrow$

$\sin(\frac{۳\pi}{۲}+\theta)=-\cos\theta$ $\quad \cos(\frac{۳\pi}{۲}+\theta)=\sin\theta$

$\cot(\frac{۳\pi}{۲}+\theta)=-\tan\theta$ $\quad \tan(\frac{۳\pi}{۲}+\theta)=-\cot\theta$

E: $\frac{۳\pi}{۲} - \theta \leftarrow$

$\sin(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)=-\cos\theta$ $\quad \cos(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)=-\sin\theta$

$\cot(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)=\tan\theta$ $\quad \tan(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)=\cot\theta$

F: $\pi+\theta \rightarrow$

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ $\quad$ $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$ $\quad$ $\cot(\pi+\theta)=\cot\theta$

G: $\pi-\theta \rightarrow$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\quad$ $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$ $\quad$ $\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$

H: $-\theta \rightarrow$

$\cos(-\theta)=\cos\theta$ $\quad$ $\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\tan(-\theta)=-\tan(\theta)$ $\quad$ $\cot(-\theta)=-\cot(\theta)$

پاسخ تشریحی:

در ابتدای کار با توجه به زاویهٔ ۳۶° داده شده، هر کدام از نسبت‌های مثلثاتی را ساده‌تر می‌کنیم.

$$\sin ۳۰۶^\circ=\sin(\underbrace{۲۷۰^\circ+۳۶^\circ}_{\frac{۳\pi}{۲}+\alpha})=-\cos ۳۶^\circ$$

$$\cos ۲۱۶^\circ=\cos(\underbrace{۱۸۰^\circ+۳۶^\circ}_{\pi+\alpha})=-\cos ۳۶^\circ$$

$$\sin ۵۴^\circ=\sin(\underbrace{۹۰^\circ-۳۶^\circ}_{\frac{\pi}{۲}-\alpha})=\cos ۳۶^\circ$$

$$\sin ۳۲۴^\circ=\sin(\underbrace{۳۶۰^\circ-۳۶^\circ}_{۲\pi-\alpha})=-\sin ۳۶^\circ$$

پس حاصل نهایی برابر است با:

$$\frac{-۲\cos ۳۶^\circ-\cos ۳۶^\circ}{\cos ۳۶^\circ-۲\sin ۳۶^\circ}=\frac{-۳\cos ۳۶^\circ}{\cos ۳۶^\circ-۲\sin ۳۶^\circ}\xrightarrow{\div\cos ۳۶^\circ}\frac{-۳}{۱-۲\tan ۳۶^\circ}=\frac{-۳}{۱-۲\times\frac{۳}{۴}}=\frac{-۳}{۱-\frac{۳}{۲}}=\frac{-۳}{-\frac{۱}{۲}}=۶$$

۵ اگر $\cot x=۳$ باشد، مقدار $\sin^۶ x+\cos^۶ x$ کدام است؟

۱) ۰/۷۳ $\quad$ ۲) ۰/۷۶ $\quad$ ۳) ۰/۶۷ $\quad$ ۴) ۰/۷۲

پاسخ: گزینه ۱ $\quad$ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۰۰۲)

یک کم «اتحاد مثلثاتی» هم ببینیم:

۱) $\tan x+\cot x=\frac{۱}{\sin x.\cos x}$ $\quad$ ۲) $\sin^۴ x+\cos^۴ x=۱-۲(\sin x.\cos x)^۲$

۳) $\sin^۶ x+\cos^۶ x=۱-۳(\sin x.\cos x)^۲$

پاسخ تشریحی:

چون $\cot x=۳$ است، $\tan x=\frac{۱}{۳}$ است. بنابراین:

$$\tan x+\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^۲ x+\cos^۲ x}{\sin x.\cos x}=\frac{۱}{\sin x.\cos x}\Rightarrow\frac{۱}{۳}+۳=\frac{۱}{\sin x.\cos x}\Rightarrow\frac{۱۰}{۳}=\frac{۱}{\sin x.\cos x}\Rightarrow\sin x.\cos x=\frac{۳}{۱۰}$$

$$\sin^۶ x+\cos^۶ x=(\sin^۲ x+\cos^۲ x)^۳-۳(\sin^۲ x+\cos^۲ x)(\sin^۲ x.\cos^۲ x)=۱-۳(\sin x.\cos x)^۲=۱-۳\times\frac{۹}{۱۰۰}=۱-\frac{۲۷}{۱۰۰}=۰/۷۳$$

۶ پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط ❄ حسابان ۱ (درس ۲، فصل ۴)

نکتهٔ ۱ : $\tan(k\pi+\theta)=\tan\theta \ , \ \cot(k\pi+\theta)=\cot\theta$

نکتهٔ ۲ : $\tan(\frac{\pi}{2}\pm\theta)=\mp\cot\theta \ , \ \cot(\frac{\pi}{2}\pm\theta)=\mp\tan\theta$

نکتهٔ ۳ : $\tan(-\theta)=-\tan\theta \ , \ \cot(-\theta)=-\cot\theta$

طبق نکات صورت و مخرج عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم. (دقت کنید که می‌توان $\frac{3\pi}{2}$ را به‌صورت $\pi+\frac{\pi}{2}$ نوشت و π را حذف کرد.)

$$\frac{-\cot\theta+3\tan\theta}{-\cot\theta+2\tan\theta}=2 \xrightarrow{\tan\theta=t} \frac{-\frac{1}{t}+3t}{-\frac{1}{t}+2t}=2 \Rightarrow \frac{3t^2-1}{2t^2-1}=2 \Rightarrow 3t^2-1=4t^2-2 \Rightarrow t^2=1 \Rightarrow \tan^2\theta=1$$

اکنون داریم:

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2\theta+\cos^4\theta=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

۷ اگر دوره تناوب توابع $f(x)=\sin(ax)-|a|$ و $g(x)=\cos\frac{4x}{a}$ یکسان باشند، حداقل مقدار f کدام است؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) -1 ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

به‌به! بالاخره رسیدیم به «دورهٔ تناوب توابع مثلثاتی»:

۱) $a\sin(bx+c)+d \Rightarrow T=\frac{2\pi}{|b|}$

۲) $a\sin^m(bx+c)+d \Rightarrow T=\frac{2\pi}{|b|}$:m فرد

۳) $a\cos(bx+c)+d \Rightarrow T=\frac{2\pi}{|b|}$

۴) $a\cos^m(bx+c)+d \Rightarrow T=\frac{2\pi}{|b|}$:m فرد

۵) $a\tan(bx+c)+d \Rightarrow T=\frac{\pi}{|b|}$

۶) $a\cot(bx+c)+d \Rightarrow T=\frac{\pi}{|b|}$

۷) $a\sin^m(bx+c)+d \Rightarrow T=\frac{\pi}{|b|}$:m زوج

۸) $a\cos^m(bx+c)+d \Rightarrow T=\frac{\pi}{|b|}$:m زوج

پاسخ تشریحی:

دورهٔ تناوب دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را نوشته و آن‌ها را برابر هم قرار می‌دهیم:

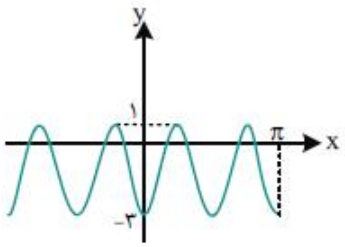
$$T_f = T_g \Rightarrow \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{4}{a}\right|} \Rightarrow |a| = \left|\frac{4}{a}\right| \Rightarrow |a| = \frac{4}{|a|} \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow |a| = 2$$

تذکر: دقت شود که اضافه یا کم کردن اعداد ثابت، دورهٔ تناوب تابع را تغییر نمی‌دهد.

$$\min f = -|1| - |a| = -1 - 2 = -3$$

گروه آموزشی ماز

۸ نمودار تابع $f(x) = a\cos(bx) + d$ به شکل مقابل است. حاصل $ad + b$ کدام می‌تواند باشد؟



۱) ۸

۲) ۲

۳) -2

۴) -6

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

هر آنچه که لازمه در مورد «ماکزیمم و مینیمم توابع مثلثاتی» بدانید:

۱) $a\sin(bx+c)+d \Rightarrow \max = |a| + d \quad \min = -|a| + d$

۲) $a\cos(bx+c)+d \Rightarrow \max = |a| + d \quad \min = -|a| + d$

۳) $a\sin^m(bx+c)+d \Rightarrow \max = |a| + d \quad \min = -|a| + d$; m: فرد

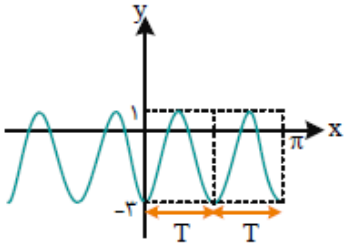
۴) $a\cos^m(bx+c)+d \Rightarrow \max = |a| + d \quad \min = -|a| + d$; m: فرد

۵) $a\sin^m(bx+c)+d \Rightarrow \max = |a| + d \quad \min = 0 + d = d$; m: زوج

۶) $a\cos^m(bx+c)+d \Rightarrow \max = |a| + d \quad \min = 0 + d = d$; m: زوج

پاسخ تشریحی:

حداکثر مقدار تابع ۱ و حداقل مقدار آن -3 است. همچنین تابع در فاصله $[0, \pi]$ دوبار تناوب خود را طی کرده است:



$$\begin{cases} \max = 1 \Rightarrow |a| + d = 1 \\ \min = -3 \Rightarrow -|a| + d = -3 \end{cases} \Rightarrow 2d = -2 \Rightarrow d = -1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

$$2T = \pi \Rightarrow T = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |b| = 4 \Rightarrow b = \pm 4$$

چون $\cos x = \cos(-x)$، پس هر دو مقدار $b = \pm 4$ صحیح هستند. حال در دوحالت $a = 2$ و $a = -2$ داریم:

$$a = 2 \Rightarrow f(x) = 2\cos(4x) - 1$$

$$a = -2 \Rightarrow f(x) = -2\cos(4x) - 1$$

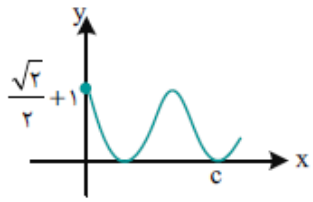
چون تابع شبیه قرینه کسینوس است(در عرض از مبدأ، دارای مینیمم است)، در نتیجه $a < 0$ است، پس: $a = -2$. بنابراین، $ad + b$ برابر است با:

$$b = 4 \Rightarrow ad + b = (-2)(-1) + 4 = 6$$

$$b = -4 \Rightarrow ad + b = (-2)(-1) - 4 = -2$$

که جواب -2 در گزینه‌ها است.

۹ اگر نمودار تابع $f(x)=a\sin(x-\frac{\pi}{۴})+b$ به شکل مقابل باشد، مقدار c کدام است؟



۱) $\frac{۳\pi}{۴}$
۲) $\frac{۱۱\pi}{۴}$
۳) $\frac{۷\pi}{۴}$
۴) ۳π

پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

عرض از مبدأ تابع $\frac{\sqrt{۲}}{۲}+۱$ است، پس:

$$(۰,\frac{\sqrt{۲}}{۲}+۱)\in f \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}+۱=a\sin(-\frac{\pi}{۴})+b \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}+۱=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}a+b \quad (*)$$

حداقل مقدار تابع، صفر است، چون تابع بر محور xها از بالا مماس است، پس $b>۰$ می‌باشد و داریم:

$$\min=۰ \Rightarrow -|a|+b=۰ \Rightarrow b=|a| \xrightarrow{\text{تابع شبیه قرینه } \sin(x-\frac{\pi}{۴}) \text{ است}} a<۰ \xrightarrow{b>۰} b=-a$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{\sqrt{۲}}{۲}+۱=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}(-b)+b \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}+۱=\frac{\sqrt{۲}}{۲}b+b \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}+۱=b(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+۱) \Rightarrow b=۱ \Rightarrow a=-۱$$

پس ضابطه تابع، $f(x)=-\sin(x-\frac{\pi}{۴})+۱$ است. برای یافتن c باید دومین ریشه مثبت تابع را بیابیم:

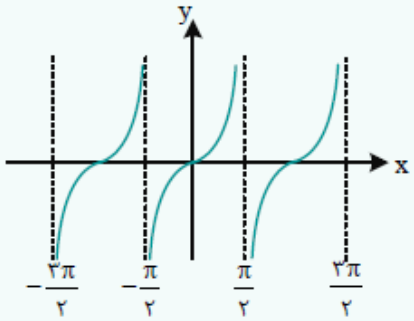
$$-\sin(x-\frac{\pi}{۴})+۱=۰ \Rightarrow \sin(x-\frac{\pi}{۴})=۱ \Rightarrow x-\frac{\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۲},... \Rightarrow x=\frac{۳\pi}{۴},\frac{۱۱\pi}{۴},...$$

۱۰ تابع $y=\tan(۲x-\frac{\pi}{۳})$ در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

۱) $(۰,\frac{\pi}{۲})$
۲) $(-\frac{\pi}{۲},۰)$
۳) $(\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۲})$
۴) $(\frac{\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۶})$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

«نمودار تابع تانژانت» رو قورت بده!



A: همانطور که مشاهده می‌شود تابع tanx در نقاط $k\pi+\frac{\pi}{۲}; k\in\mathbb{Z}$ تعریف نشده است.

B: تابع tanx در بازه‌های $\left(\frac{۲k+۱}{۲}\pi,\frac{۲k+۳}{۲}\pi\right)$ که $k\in\mathbb{Z}$ همواره صعودی اکید است، اما به طور کلی این تابع صعودی اکید نمی‌باشد.

پاسخ تشریحی:

تابع تانژانت در بازه‌ای صعودی است که شامل مجانب قائم (ریشه‌های کسینوس) نباشد. حال از روی گزینه‌ها، بازه تغییرات $(۲x-\frac{\pi}{۳})$ را می‌سازیم و بررسی می‌کنیم آیا در بازه موردنظر مقدار کسینوس صفر می‌شود یا نه:

بررسی گزینه‌ها:

۱) $\frac{\pi}{۲}$ در این بازه قرار دارد. $۰<x<\frac{\pi}{۲} \Rightarrow ۰<۲x<\pi \Rightarrow -\frac{\pi}{۳}<۲x-\frac{\pi}{۳}<\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow$

۲

$-\frac{\pi}{۲}<x<۰ \Rightarrow -\pi<۲x<۰ \Rightarrow -\frac{۴\pi}{۳}<۲x-\frac{\pi}{۳}<-\frac{\pi}{۳} \Rightarrow$ $(-\frac{\pi}{۲})$ در این بازه قرار دارد.

۳

$\frac{\pi}{۶}<x<\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \frac{\pi}{۳}<۲x<\pi \Rightarrow ۰<۲x-\frac{\pi}{۳}<\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow$ $\frac{\pi}{۲}$ در این بازه قرار دارد.

۴

$\frac{\pi}{۲}<x<\frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow \pi<۲x<\frac{۵\pi}{۳} \Rightarrow \frac{۲\pi}{۳}<۲x-\frac{\pi}{۳}<\frac{۴\pi}{۳} \Rightarrow$ در این بازه مقداری وجود ندارد که کسینوس را صفر کند.

۱۱- تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۱+\sin^۲ ۲x=۲\sin^۲ ۴x+\cos^۲ ۲x$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

بالاخره رسیدیم به معادلات مثلثاتی:

فرمول‌های زیر در مورد معادلات مثلثاتی را به خاطر بسپارید:

۱) $\cos\alpha=\cos\beta \Rightarrow \alpha=۲k\pi\pm\beta$

۲) $\sin\alpha=\sin\beta \Rightarrow \alpha=۲k\pi+\beta\ ,\alpha=۲k\pi+\pi-\beta$

۳) $\tan\alpha=\tan\beta \Rightarrow \alpha=k\pi+\beta$

۴) $\cot\alpha=\cot\beta \Rightarrow \alpha=k\pi+\beta$

یه سری هم به نسبت‌های مثلثاتی ۲α بزنیم:

دوباره حفظی☹

۱) $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha.\cos\alpha$

۲) $\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱=۱-۲\sin^۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha$

۳) $\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$

پاسخ تشریحی:

$۱+\sin^۲ ۲x=۲\sin^۲ ۴x+\cos^۲ ۲x \Rightarrow ۲\sin^۲ ۴x+\cos^۲ ۲x-\sin^۲ ۲x-۱=۰ \Rightarrow ۲\sin^۲ ۴x+\cos ۴x-۱=۰$

$\Rightarrow ۲(۱-\cos^۲ ۴x)+\cos ۴x-۱=۰ \Rightarrow -۲\cos^۲ ۴x+\cos ۴x+۱=۰$

مجموع ضرایب صفر →

$\cos ۴x=۱ \Rightarrow ۴x=۲k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}$ (I)

$\cos ۴x=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۴x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}\pm\frac{\pi}{۶}$ (II)

(I)

k	۰	۱	۲
x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π

(II)

k	۰	۱	۲
x	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۳}$, $\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۶}$

تعداد جواب‌ها در بازهٔ $[۰,\pi]$ برابر ۷ است.

۱۲- کدام‌یک از گزاره‌های زیر صحیح هستند؟

الف: اگر $\tan(۲\alpha+\beta)=۵$ و $\tan(\alpha-۲\beta)=۴$ باشد، آن‌گاه حاصل $\tan(۳\alpha+۴\beta)$ برابر $\frac{۵۳}{۸}$ است.

ب: در هر مثلث دلخواه $\overset{\Delta}{A\,B\,C}$، حاصل عبارت $\frac{\tan\hat{A}+\tan\hat{B}+\tan\hat{C}}{\tan\hat{A}\tan\hat{B}\tan\hat{C}}$ همواره برابر ۱ است.

۱) فقط الف ۲) فقط ب ۳) هر دو گزاره الف و ب ۴) هیچ‌کدام

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۴)

از «نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل» لذت ببر!

۱) $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

۲) $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha.\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

۳) $\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{۱\mp\tan\alpha\tan\beta}$

بررسی موارد:

گزاره الف صحیح است، زیرا:

با فرض $x=۲\alpha+\beta$ و $y=\alpha-۲\beta$ خواهیم داشت:

$$۲x-y=(۴\alpha+۲\beta)-(\alpha-۲\beta)=۳\alpha+۴\beta$$

بنابراین داریم:

$$\tan(۲\alpha+\beta)=۵\Rightarrow\tan x=۵\Rightarrow\tan ۲x=\frac{۲\tan x}{۱-\tan^{۲}x}=\frac{۱۰}{۱-۲۵}=\frac{-۵}{۱۲}$$

$$\tan(\alpha-۲\beta)=۴\Rightarrow\tan y=۴$$

$$\tan(۳\alpha+۴\beta)=\tan(۲x-y)=\frac{\tan ۲x-\tan y}{۱+\tan ۲x\tan y}=\frac{-\frac{۵}{۱۲}-۴}{۱+(\frac{-۵}{۱۲})(۴)}=\frac{-\frac{۵۳}{۱۲}}{-\frac{۲}{۳}}=\frac{۵۳}{۸}$$

گزاره ب صحیح است، زیرا:

$\Rightarrow\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^{\circ}\Rightarrow\hat{A}+\hat{B}=\pi-\hat{C}$ مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر ۱۸۰° است.

$$\Rightarrow\tan(\hat{A}+\hat{B})=\tan(\pi-\hat{C})\Rightarrow\frac{\tan\hat{A}+\tan\hat{B}}{۱-\tan\hat{A}\tan\hat{B}}=-\tan\hat{C}$$

$$\tan\hat{A}+\tan\hat{B}=-\tan\hat{C}+\tan\hat{A}\tan\hat{B}\tan C\Rightarrow\tan\hat{A}+\tan\hat{B}+\tan\hat{C}=\tan\hat{A}\tan\hat{B}\tan\hat{C}$$

$$\Rightarrow\frac{\tan\hat{A}+\tan\hat{B}+\tan\hat{C}}{\tan\hat{A}\tan\hat{B}\tan\hat{C}}=۱$$

۱۳- اگر در معادله مثلثاتی $۲(\cos ۲x+\sin ۲x)-(۲m+۱)\sin ۴x=۳$، شرط $\cos(۲x-\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{۴\sqrt{۲}}$ برقرار باشد، دوره تناوب اصلی تابع $f(x)=(۳m+۲)\tan(\frac{mx}{۲}+\frac{\pi}{۳})+۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۲\pi}{۹}$ ۲) $\frac{۴\pi}{۹}$ ۳) $\frac{۲۴\pi}{۵}$ ۴) $\frac{۱۲\pi}{۵}$

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

دنیایی از «دورهٔ تناوب در توابع مثلثاتی»!

۱) $a\sin(bx+c)+d \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|b|}$

۲) $a\sin^{m}(bx+c)+d \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|b|}$ m:فرد

۳) $a\cos(bx+c)+d \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|b|}$

۴) $a\cos^{m}(bx+c)+d \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|b|}$ m: فرد

۵) $a\tan(bx+c)+d \Rightarrow T=\frac{\pi}{|b|}$

۶) $a\cot(bx+c)+d \Rightarrow T=\frac{\pi}{|b|}$

۷) $a\sin^{m}(bx+c)+d \Rightarrow T=\frac{\pi}{|b|}$ m: زوج

۸) $a\cos^{m}(bx+c)+d \Rightarrow T=\frac{\pi}{|b|}$ m: زوج

پاسخ تشریحی:

از فرمول مثلثاتی $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{۲}\cos(\alpha-\frac{\pi}{۴})$ استفاده می‌کنیم:

$$\cos(۲x-\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{۴\sqrt{۲}} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۲}}(\cos ۲x+\sin ۲x)=\frac{۱}{۴\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow \cos ۲x+\sin ۲x=\frac{۱}{۴} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} ۱+\sin ۴x=\frac{۱}{۱۶} \Rightarrow \sin ۴x=-\frac{۱۵}{۱۶}$$

با جایگذاری این مقادیر در معادلهٔ داده شده، مقدار پارامتر m به دست می‌آید:

$$۲(\cos ۲x+\sin ۲x)-(۲m+۱)\sin ۴x=۳ \Rightarrow ۲(\frac{۱}{۴})-(۲m+۱)(-\frac{۱۵}{۱۶})=۳$$

$$\Rightarrow (۲m+۱)(-\frac{۱۵}{۱۶})=-\frac{۵}{۲} \Rightarrow ۲m+۱=\frac{۸}{۳} \Rightarrow m=\frac{۵}{۶}$$

$$f(x)=(۳m+۲)\tan(\frac{mx}{۲}+\frac{\pi}{۳})+۱ \Rightarrow f(x)=\frac{۹}{۲}\tan(\frac{۵}{۱۲}x+\frac{\pi}{۳})+۱$$

$$\Rightarrow T=\frac{\pi}{\frac{۵}{۱۲}}=\frac{۱۲\pi}{۵}$$

۱۴- اگر $A=\tan ۱۸^\circ+\tan ۲۷^\circ+\tan ۱۸^\circ\tan ۲۷^\circ$ و $B=۴\sin ۵۰^\circ-\frac{\sqrt{۳}}{\cos ۷۰^\circ}$، آن‌گاه حاصل $\frac{A}{B}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) -۲

پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۴)

پاسخ تشریحی:

$A=\tan ۱۸^\circ+\tan ۲۷^\circ+\tan ۱۸^\circ\tan ۲۷^\circ$

برای محاسبه A، با توجه به این که $۱۸^\circ+۲۷^\circ=۴۵^\circ$، پس کافی است حاصل $\tan(۱۸^\circ+۲۷^\circ)$ را محاسبه کنیم:

$$\tan(۱۸^\circ+۲۷^\circ)=\frac{\tan ۱۸^\circ+\tan ۲۷^\circ}{۱-\tan ۱۸^\circ\tan ۲۷^\circ}\Rightarrow ۱=\frac{\tan ۱۸^\circ+\tan ۲۷^\circ}{۱-\tan ۱۸^\circ\tan ۲۷^\circ}\Rightarrow \tan ۱۸^\circ+\tan ۲۷^\circ=۱-\tan ۱۸^\circ\tan ۲۷^\circ$$

$$\Rightarrow \tan ۱۸^\circ+\tan ۲۷^\circ+\tan ۱۸^\circ\tan ۲۷^\circ=۱\Rightarrow A=۱$$

برای محاسبه B نیز خواهیم داشت:

$$B=۴\sin ۵۰^\circ-\frac{\sqrt{۳}}{\cos ۷۰^\circ}=۴\cos ۴۰^\circ-\frac{\sqrt{۳}}{\sin ۲۰^\circ}=\frac{۴\cos ۴۰^\circ\sin ۲۰^\circ-\sqrt{۳}}{\sin ۲۰^\circ}=\frac{۲(۲\cos ۴۰^\circ\sin ۲۰^\circ-\frac{\sqrt{۳}}{۲})}{\sin ۲۰^\circ}=\frac{۲(۲\cos ۴۰^\circ\sin ۲۰^\circ-\sin ۶۰^\circ)}{\sin ۲۰^\circ}$$

$$=\frac{۲(۲\cos ۴۰^\circ\sin ۲۰^\circ-\sin(۲۰^\circ+۴۰^\circ))}{\sin ۲۰^\circ}=\frac{۲(۲\cos ۴۰^\circ\sin ۲۰^\circ-\sin ۲۰^\circ\cos ۴۰^\circ-\cos ۲۰^\circ\sin ۴۰^\circ)}{\sin ۲۰^\circ}$$

$$=\frac{۲(\cos ۴۰^\circ\sin ۲۰^\circ-\sin ۴۰^\circ\cos ۲۰^\circ)}{\sin ۲۰^\circ}=\frac{۲(\sin(۲۰^\circ-۴۰^\circ))}{\sin ۲۰^\circ}=\frac{۲(-\sin ۲۰^\circ)}{\sin ۲۰^\circ}=-۲$$

$$\Rightarrow B=-۲\Rightarrow \frac{A}{B}=\frac{-۱}{۲}$$

۱۵- معادلهٔ $\sin(۲x+\frac{\pi}{۱۶})=۳\sin(۲x-\frac{\pi}{۱۶})$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ ترکیبی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

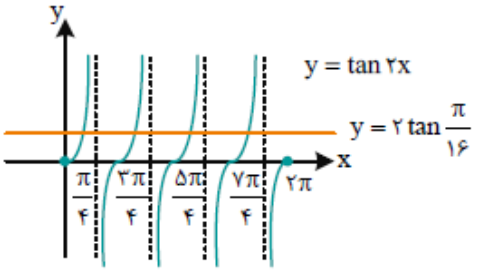
پاسخ تشریحی:

با استفاده از روابط مجموع و تفاضل زوایا داریم:

$$\sin(۲x+\frac{\pi}{۱۶})=۳\sin(۲x-\frac{\pi}{۱۶})\Rightarrow \sin ۲x\cos\frac{\pi}{۱۶}+\cos ۲x\sin\frac{\pi}{۱۶}=۳(\sin ۲x\cos\frac{\pi}{۱۶}-\cos ۲x\sin\frac{\pi}{۱۶})$$

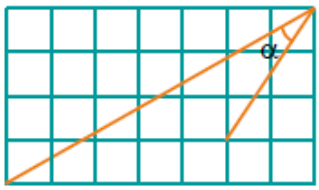
$$\Rightarrow \cos ۲x\sin\frac{\pi}{۱۶}+۳\cos ۲x\sin\frac{\pi}{۱۶}=۳\sin ۲x\cos\frac{\pi}{۱۶}-\sin ۲x\cos\frac{\pi}{۱۶}\Rightarrow ۴\cos ۲x\sin\frac{\pi}{۱۶}=۲\sin ۲x\cos\frac{\pi}{۱۶}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin ۲x}{\cos ۲x}=\frac{۲\sin\frac{\pi}{۱۶}}{\cos\frac{\pi}{۱۶}}\Rightarrow \tan ۲x=۲\tan\frac{\pi}{۱۶}$$



برای یافتن تعداد جواب‌های معادله، کافی است نمودار تابع $y=\tan ۲x$ را با تابع ثابت $y=۲\tan\frac{\pi}{۱۶}$ که نمودار آن یک خط راست موازی محور xها است، قطع دهیم تا تعداد جواب‌های معادله در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ مشخص شود. تعداد جواب‌های معادله در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ برابر ۴ است، زیرا تعداد نقاط تلاقی برابر ۴ است.

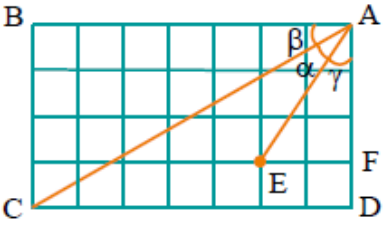
۱۶- در شکل مقابل، طول ضلع هر یک از مربع‌های کوچک برابر ۲ واحد است. اگر $\cos\alpha=\frac{a\sqrt{b}}{5}$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟



۱) ۳
۲) ۷
۳) ۵
۴) ۹

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۴)

پاسخ تشریحی:



طبق شکل داریم:

$$\alpha+\beta+\gamma=90^\circ \Rightarrow \alpha=90^\circ-(\beta+\gamma)$$
$$\Rightarrow \cos\alpha=\cos\big(90^\circ-(\beta+\gamma)\big) \Rightarrow \cos\alpha=\sin(\beta+\gamma)$$
$$\Rightarrow \cos\alpha=\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma$$

$$AE=\sqrt{6^2+4^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13} \quad , \quad AC=\sqrt{14^2+8^2}=\sqrt{260}=2\sqrt{65}$$

$$\cos\alpha=\frac{8}{2\sqrt{65}}\times\frac{6}{2\sqrt{13}}+\frac{14}{2\sqrt{65}}\times\frac{4}{2\sqrt{13}}=\frac{12}{13\sqrt{5}}+\frac{14}{13\sqrt{5}}=\frac{26}{13\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$a=2\ ,\ b=5 \Rightarrow a+b=7$$

۱۷- مجموع جواب‌های معادله $\tan 2x=\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{11\pi}{2}$ ۲) 4π ۳) 3π ۴) $\frac{5\pi}{2}$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ ترکیبی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

آخ جون فرمول! فرمول زیر را فرا بگیرید آی فراگیران!

$$\left.\begin{array}{l}1)\ \cos(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)\\ 2)\ \sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)\end{array}\right\}\xrightarrow{\div}\cot(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$$

پاسخ تشریحی:

$$\tan 2x=\cot(x+\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \tan 2x=\tan(\frac{\pi}{2}-(x+\frac{\pi}{4}))$$

$$\tan 2x=\tan(\frac{\pi}{4}-x) \Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{4}-x \Rightarrow 3x=k\pi+\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}$$

k	۰	۱	۲	۳	۴	۵
x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{4}$

توجه شود که جواب‌های $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{4}$ غیرقابل قبول هستند، زیرا مخرج کسر را صفر می‌کنند، بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر است با:

$$\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}+\frac{13\pi}{12}+\frac{17\pi}{12}=\frac{36\pi}{12}=3\pi$$

۱۸- اگر $A=۲\sin ۴۰^\circ \sin ۷۰^\circ+\cos ۱۰^\circ \cos ۲۰^\circ$ و $B=۲\sin ۵۰^\circ \sin ۲۰^\circ-\cos ۸۰^\circ \cos ۷۰^\circ$، آن‌گاه حاصل $A+B$ کدام است؟

۱) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $۱+\sqrt{۳}$ ۴) $۲+\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۴)

پاسخ تشریحی:

$A=۲\sin ۴۰^\circ \sin ۷۰^\circ+\cos ۱۰^\circ \cos ۲۰^\circ$

$B=۲\sin ۵۰^\circ \sin ۲۰^\circ-\cos ۸۰^\circ \cos ۷۰^\circ$

$A+B=۲\sin ۴۰^\circ \sin ۷۰^\circ+\cos ۱۰^\circ \cos ۲۰^\circ+۲\sin ۵۰^\circ \sin ۲۰^\circ-\cos ۸۰^\circ \cos ۷۰^\circ$

$\Rightarrow A+B=۲\left(\sin ۴۰^\circ \sin ۷۰^\circ+\sin ۵۰^\circ \sin ۲۰^\circ\right)+\cos ۱۰^\circ \cos ۲۰^\circ-\cos ۸۰^\circ \cos ۷۰^\circ$

$\sin ۷۰^\circ=\cos ۲۰^\circ$, $\sin ۵۰^\circ=\cos ۴۰^\circ \Rightarrow \sin ۴۰^\circ \sin ۷۰^\circ+\sin ۵۰^\circ \sin ۲۰^\circ=\sin ۴۰^\circ \cos ۲۰^\circ+\cos ۴۰^\circ \sin ۲۰^\circ=\sin(۴۰^\circ+۲۰^\circ)$

$\cos ۸۰^\circ=\sin ۱۰^\circ$, $\cos ۷۰^\circ=\sin ۲۰^\circ \Rightarrow \cos ۱۰^\circ \cos ۲۰^\circ-\cos ۸۰^\circ \cos ۷۰^\circ=\cos ۱۰^\circ \cos ۲۰^\circ-\sin ۱۰^\circ \sin ۲۰^\circ=\cos(۱۰^\circ+۲۰^\circ)$

$\Rightarrow A+B=۲\left(\sin(۴۰^\circ+۲۰^\circ)\right)+\cos(۱۰^\circ+۲۰^\circ)=۲\sin ۶۰^\circ+\cos ۳۰^\circ$

$\Rightarrow A+B=۲(\frac{\sqrt{۳}}{۲})+\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

۱۹- اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جواب معادلهٔ $\sin ۴x+\sin ۲x-۱=\cos ۲x-\cos ۴x$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۵\pi}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱۷\pi}{۱۲}$ ۳) $\frac{۳۵\pi}{۲۴}$ ۴) $\frac{۳۷\pi}{۲۴}$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

$\sin ۴x+\sin ۲x-۱=\cos ۲x-\cos ۴x \Rightarrow ۲\sin ۲x\cos ۲x+\sin ۲x-۱=\cos ۲x-(۱-۲\sin^۲ ۲x)$

$\Rightarrow ۲\sin ۲x\cos ۲x+\sin ۲x=\cos ۲x+۲\sin^۲ ۲x \Rightarrow ۲\sin ۲x\cos ۲x-۲\sin^۲ ۲x+\sin ۲x-\cos ۲x=۰$

$\Rightarrow ۲\sin ۲x(\cos ۲x-\sin ۲x)-(\cos ۲x-\sin ۲x)=۰ \Rightarrow (\cos ۲x-\sin ۲x)(۲\sin ۲x-۱)=۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos ۲x-\sin ۲x=۰ \Rightarrow \sin ۲x=\cos ۲x \Rightarrow \tan ۲x=۱ & (*) \\ ۲\sin ۲x-۱=۰ \Rightarrow \sin ۲x=\frac{۱}{۲} & (**) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۸} & (*) \\ ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۱۲} & (**) \\ ۲x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow x=k\pi+\frac{۵\pi}{۱۲} & (**) \end{cases}$$

k	۰	۱	۲	۳
x	$\frac{\pi}{۸}$	$\frac{۵\pi}{۸}$	$\frac{۹\pi}{۸}$	$\frac{۱۳\pi}{۸}$

k	۰	۱
x	$\frac{\pi}{۱۲}$	$\frac{۱۳\pi}{۱۲}$

k	۰	۱
x	$\frac{۵\pi}{۱۲}$	$\frac{۱۷\pi}{۱۲}$

با توجه به دسته جواب‌های به دست آمده، کوچک‌ترین جواب معادله در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ برابر $\frac{\pi}{۱۲}$ و بزرگ‌ترین جواب معادله در این بازه برابر $\frac{۱۳\pi}{۸}$ است، پس اختلاف آن‌ها برابر $\frac{۱۳\pi}{۸}-\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۳۷\pi}{۲۴}$ است.

۲۰- اگر تعداد ریشه‌های معادلهٔ $\sin^۴(۲\pi x)-\cos^۴(۲\pi x)=\frac{۱}{۵}$ در بازهٔ $[۰,۲]$ برابر m و تعداد ریشه‌های معادلهٔ $\cos ۴x+\cos ۳x=۰$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ برابر n باشد، $(m-n)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۴- ۴) ۳-

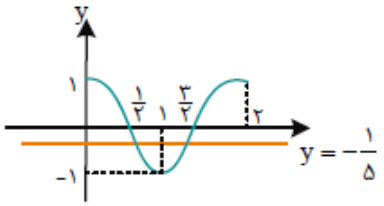
پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

$$\sin^۴(۲\pi x)-\cos^۴(۲\pi x)=\frac{۱}{۵}\Rightarrow(\sin^۲(۲\pi x)-\cos^۲(۲\pi x))(\sin^۲(۲\pi x)+\cos^۲(۲\pi x))=\frac{۱}{۵}$$

$$\Rightarrow(-\cos(۴\pi x))\times ۱=\frac{۱}{۵}\Rightarrow\cos(۴\pi x)=-\frac{۱}{۵}$$

اگر نمودار تابع $y=\cos(\pi x)$ را در بازهٔ $[۰,۲]$ رسم کنیم، به صورت زیر خواهد بود. (نمودار این تابع با تقسیم طول تمامی نقاط تابع $y=\cos x$ بر عدد π به دست می‌آید.)



چون خط $y=-\frac{۱}{۵}$ نمودار تابع $y=\cos(\pi x)$ را در بازهٔ $[۰,۲]$ در دو نقطه قطع می‌کند، پس خط $y=-\frac{۱}{۵}$ نمودار تابع $y=\cos(۴\pi x)$ را در بازهٔ $[۰,۲]$ در ۸ نقطه قطع می‌کند، زیرا تناوب آن نسبت به تابع $y=\cos(\pi x)$، $\frac{۱}{۴}$ برابر می‌شود، پس معادلهٔ داده شده در بازهٔ $[۰,۲]$ دارای ۸ جواب است، یعنی $m=۸$ است.

$$\cos ۴x+\cos ۳x=۰\Rightarrow\cos ۴x=-\cos ۳x\Rightarrow\cos ۴x=\cos(\pi-۳x)$$

$$\begin{cases}۴x=۲k\pi+\pi-۳x\Rightarrow ۷x=۲k\pi+\pi\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۷}+\frac{\pi}{۷}\\ ۴x=۲k\pi-\pi+۳x\Rightarrow x=۲k\pi-\pi\end{cases}$$

k	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
x	$\frac{\pi}{۷}$	$\frac{۳\pi}{۷}$	$\frac{۵\pi}{۷}$	π	$\frac{۹\pi}{۷}$	$\frac{۱۱\pi}{۷}$	$\frac{۱۳\pi}{۷}$

k	۱
x	π

دسته جواب اول به ازای $۰\le k\le ۶$ دارای ۷ جواب در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ و دسته جواب دوم به ازای $k=۱$، دارای یک جواب $x=\pi$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ است، اما چون $x=\pi$ در دسته جواب اول هم به دست می‌آید (به ازای $k=۳$)، پس این جواب یک جواب تکراری محسوب می‌شود. یعنی تعداد جواب‌های معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ برابر ۷ است، یعنی $n=۷$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$m-n=۸-۷=۱$$

۲۱ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحه‌های ۲ تا ۱۷ فیزیک ۱

موارد «الف» و «پ» نادرست و موارد «ب»، «ت» و «ث» درست هستند.

۲۲ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحهٔ ۱۰ فیزیک ۱

آهنگ تخلیهٔ آب به‌صورت زیر مشخص می‌شود:

$$\text{آهنگ تخلیهٔ آب} = \frac{\text{حجم مخزن}}{\text{مدت‌زمان تخلیه}} = \frac{۶۰\,m^۳}{۵\,h} = \frac{۶۰\times۱۰^۳\,L}{۵\times۶۰\,min} = ۲۰۰\,\frac{L}{min}$$

۲۳ - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحهٔ ۱۶ فیزیک ۱

ابتدا حجم واقعی مکعب را حساب می‌کنیم:

$$V_{\text{واقعی}} = V_{\text{ظاهری}} - V_{\text{حفره}}$$

حجم ظاهری را با استفاده از روابط ریاضی محاسبه می‌کنیم:

$$V_{\text{ظاهری}} = a^۳ = (۵)^۳\,mm^۳ = ۱۲۵\,mm^۳$$

پس حجم واقعی برابر است با:

$$V_{\text{واقعی}} = ۱۲۵ - ۲۵ = ۱۰۰\,mm^۳$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ محاسبهٔ چگالی می‌توان نوشت:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{۵\times۱۰^{-۴}\times۱۰^۳\,g}{۱۰۰\,mm^۳} = \frac{۵\times۱۰^{-۱}\times۱۰^۹\,ng}{۱۰^۲\,mm^۳} = ۵\times۱۰^۶\,\frac{ng}{mm^۳}$$

۲۴ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحهٔ ۱۷ فیزیک ۱

ابتدا باید جرم فلز به‌کار رفته در پوسته را حساب کرد؛ برای این کار ابتدا حجم واقعی آن را محاسبه می‌کنیم:

$$V_{\text{خارجی پوسته}} = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = \frac{۴}{۳}(۳)(۵)^۳ = ۵۰۰\,cm^۳$$

$$V'_{\text{داخلی پوسته}} = \frac{۴}{۳}\pi r'^۳ = \frac{۴}{۳}(۳)(۴)^۳ = ۲۵۶\,cm^۳$$

$$V_{\text{واقعی پوسته}} = ۵۰۰ - ۲۵۶ = ۲۴۴\,cm^۳$$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m_{\text{فلز}} = \rho V = ۱/۵\times۲۴۴ = ۳۶۶\,g$$

اکنون جرم مایع اولیهٔ داخل پوسته را مشخص می‌کنیم:

$$\rho' = \frac{m'}{V'} \Rightarrow m' = \rho' V' = \left(\frac{۰/۶\times۲۵۶}{۲}\right) = ۷۶/۸\,g$$

برای آنکه مجموعه در آب فرو برود باید چگالی آن از چگالی آب بزرگ‌تر باشد، پس داریم:

$$\rho_{\text{مجموعه}} > \rho_{\text{آب}} \Rightarrow \frac{m_{\text{مجموعه}}}{V_{\text{مجموعه}}} > ۱ \Rightarrow \frac{m_{\text{مجموعه}}}{۵۰۰} > ۱ \Rightarrow m_{\text{مجموعه}} > ۵۰۰\,g \Rightarrow ۵۰۰ = m_{\text{فلز}} + m_{\text{مایع داخل پوسته}} + m_{\text{مایع جدید}}$$

۲۵ پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحهٔ ۱۵ فیزیک ۱

دقت در وسایل اندازه‌گیری رقمی، مرتبهٔ اولین رقم سمت راست آن یعنی $۰/۰۰۰۱kg$ یا $۰/۱g$ ($۱dg$) است.

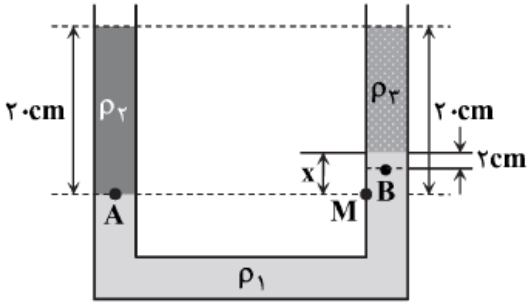
۲۶ پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحه‌های ۲۴ تا ۲۶ فیزیک ۱

به مطالب بیان‌شده در صفحه‌های ۲۴ تا ۲۶ کتاب درسی دقت شود.

۲۷ پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحهٔ ۳۰ فیزیک ۱

افزایش دما و اضافه کردن ناخالصی باعث کاهش نیروی هم‌چسبی بین ذرات آب در سطح آن شده و نتیجهٔ آن کاهش کشش سطحی است.

۲۸ پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحهٔ ۳۵ فیزیک ۱



با استفاده از هم‌فشار بودن نقاط A و M ابتدا مقدار x را مشخص می‌کنیم:

$$P_A = P_M \Rightarrow \rho_۲ g(۰/۲) = \rho_۲ g(۰/۲ - x) + \rho_۱ gx$$
$$\Rightarrow ۷۵۰ \times ۰/۲ = ۶۰۰(۰/۲ - x) + ۱۲۰۰x$$
$$۱۵۰ = ۱۲۰ - ۶۰۰x + ۱۲۰۰x \Rightarrow ۳۰ = ۶۰۰x \Rightarrow x = ۰/۰۵\,m = ۵\,cm$$

اکنون برای محاسبهٔ اختلاف فشار بین نقاط A و B می‌توان نوشت:

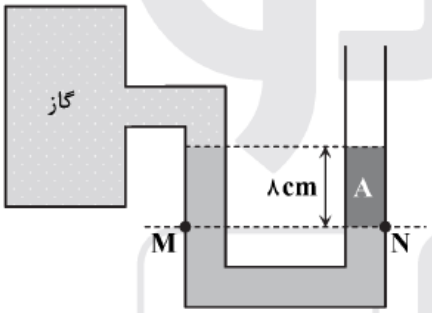
$$P_A - P_B = \rho_۱ g(x - ۰/۰۲) = ۱۲۰۰ \times ۱۰(۰/۰۵ - ۰/۰۲) \Rightarrow P_A - P_B = ۳۶۰Pa$$

۲۹ پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * صفحهٔ ۳۵ فیزیک ۱

با توجه به رابطهٔ محاسبهٔ نیرو برحسب فشار می‌توان نوشت:

$$F_۱ = \frac{۷۲}{۳۵}F_۲ \Rightarrow P_۱A_۱ = \frac{۷۲}{۳۵}(P_۲A_۲) \Rightarrow (P_۰ + \rho g(۰/۲۵ + ۰/۱۵))۲A_۲ = \frac{۷۲}{۳۵}(P_۰ + \rho g \times ۰/۲۵)A_۲$$
$$\Rightarrow \frac{۷۲}{۳۵}P_۰ - ۲P_۰ = \frac{۲}{۳۵}P_۰ = \rho g(۰/۸ - \frac{۱۸}{۳۵}) \Rightarrow ۲P_۰ = \rho g(۲۸ - ۱۸) \Rightarrow ۲ \times ۱۰^۵ = ۱۰۰\rho \Rightarrow \rho = ۲۰۰۰\frac{kg}{m^۳} = ۲\frac{g}{cm^۳}$$

۳۰ پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحهٔ ۳۸ فیزیک ۱



فشار در نقاط M و N یکسان است. در این صورت می‌توان نوشت:

$$P_M = P_N \Rightarrow P_{\text{گاز}} + P_{\text{جیوه}} = P_A + P_۰$$
$$\Rightarrow (P_{\text{گاز}} - P_۰) + ۸\,cmHg = P_A \Rightarrow P_A = -۶ + ۸ = ۲\,cmHg$$

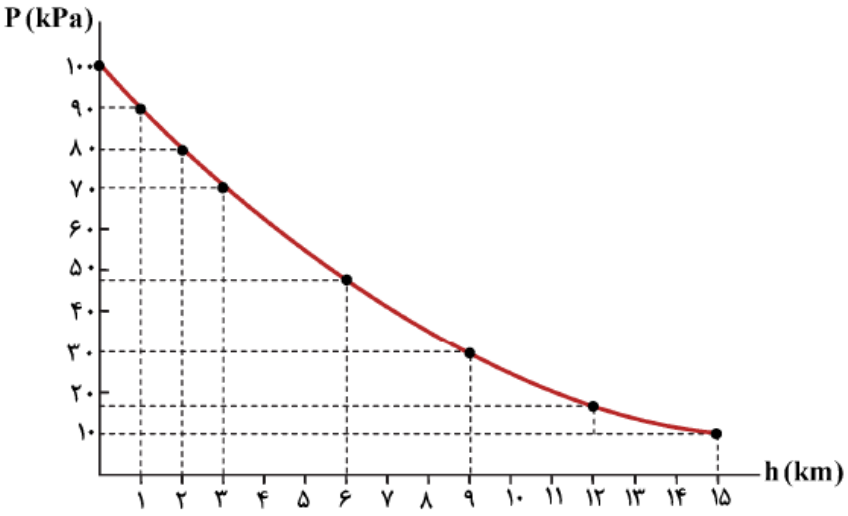
اکنون با توجه به رابطهٔ هم‌فشاری بین جیوه و مایع A داریم:

$$\rho_{Hg}h_{Hg} = \rho_A h_A \Rightarrow ۱۳/۶ \times ۲ = \rho_A \times ۸$$
$$\Rightarrow \rho_A = \frac{۱۳/۶}{۴} = ۳/۴\frac{g}{cm^۳} = ۳۴۰۰\frac{kg}{m^۳}$$

۳۱ – پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحهٔ ۴۲ فیزیک ۱

چوب بر سطح آب شناور است، نیروی شناوری وارد بر آن برابر با وزن چوب ($F_b = W_{\text{چوب}}$) است. از طرفی چون فلز در مایع ته‌نشین شده ($F_b < W_{\text{فلز}}$) است، در این صورت با قرار دادن چوب در ظرف نیروی شناوری تغییر نمی‌کند، پس ارتفاع h ثابت است. اما با قرار دادن فلز در ظرف، نیروی شناوری بیشتر شده و به اندازهٔ وزن فلز افزایش می‌یابد، بنابراین ارتفاع h افزایش می‌یابد.

۳۲ – پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحهٔ ۳۶ فیزیک ۱



اگر از سطح دریاهای آزاد به مقدار ۳ km بالا رویم، چگالی هوا تقریباً ثابت است. در این صورت با توجه به رابطهٔ $\Delta P = \rho g \Delta h$، فشار هوا به‌صورت خطی کاهش می‌یابد.

بنابراین در دو تغییر به‌اندازهٔ ۱۵۰۰ متر، فشار هوا به مقدار یکسان ΔP تغییر می‌کند.

اما پس از آن به‌علت کاهش چگالی هوا در ۱۵۰۰ متر سوم، کاهش فشار کمتر از ۱۵۰۰ متر دوم است.

۳۳ – پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * صفحهٔ ۳۴ فیزیک ۱

افزایش ارتفاع مایع درون ظرف را به واسطهٔ اضافه کردن مایع حساب می‌کنیم:

$$A_{\text{بالا}} = \pi r_{\text{بالا}}^2 = \pi (4r_{\text{پایین}})^2 = 16\pi r_{\text{پایین}}^2 \Rightarrow A_{\text{بالا}} = 16 A_{\text{پایین}}$$

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} \Rightarrow \Delta m = \rho \Delta V_{\text{بالا}} = \rho A_{\text{بالا}} \Delta h \Rightarrow \Delta h = \frac{\Delta m}{\rho A_{\text{بالا}}}$$

با استفاده از رابطهٔ نیرو و فشار خواهیم داشت:

$$\Delta F_{\text{پایین}} = \rho g \Delta h A_{\text{پایین}} = \rho g \frac{\Delta m}{\rho A_{\text{بالا}}} A_{\text{پایین}} \xrightarrow{A_{\text{بالا}} = 16 A_{\text{پایین}}} \Delta F_{\text{پایین}} = \frac{10 \times 0/8 \times A_{\text{پایین}}}{16 A_{\text{پایین}}} = 0/5\,\text{N}$$

۳۴ – پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * صفحهٔ ۴۳ فیزیک ۱

آهنگ جریان شاره یعنی حجم شارهٔ عبوری از مقطع لوله در یکای زمان ثابت است. برای مقایسهٔ تندی حرکت شاره در دو قسمت با استفاده از معادلهٔ پیوستگی می‌توان نوشت:

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A_{۲,\text{نازک}} = \frac{1}{9} A_{۱,\text{ضخیم}}$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow A_1 v_1 = \frac{1}{9} A_1 v_2 \Rightarrow v_2 = 9 v_1$$

۳۵ چند مورد از عبارات زیر درست بیان شده است؟

الف: خط‌کشی که تا میلی‌متر مدرج شده، دقیق‌تر از خط‌کشی است که تا سانتی‌متر مدرج شده است.

ب: در مدل‌سازی سقوط یک برگ از درخت، نمی‌توان از تأثیر نیروی مقاومت هوا روی برگ صرف‌نظر کرد.

پ: کمیت‌های طول، شدت روشنایی و جرم از جمله کمیت‌های اصلی هستند که یکای آن‌ها در دستگاه بین‌المللی به ترتیب متر، کندلا و گرم می‌باشد.

ت: مقدار یک ماده ۰/۰۰۲۵ مول می‌باشد که با نمادگذاری علمی به صورت $۲/۵\times۱۰^{-۴}$ مول نوشته می‌شود.

ث: جریان الکتریکی کمیتی اصلی می‌باشد که یکای آن در SI برابر آمپر است. این کمیت برداری می‌باشد.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ خط به خط کتاب درسی ـ ۱۰۰۱)

یکاها و کمیت‌ها

۱) کمیت‌های فیزیکی در سیستم SI به دو گروه اصلی و فرعی تقسیم می‌شوند. هفت کمیت زیر کمیت‌های اصلی هستند و سایر کمیت‌ها، کمیت‌های فرعی می‌باشند.

کمیت	نام یکا	نماد یکا
طول	متر	m
جرم	کیلوگرم	kg
زمان	ثانیه	s
دما	کِلوین	K
مقدار ماده	مول	mol
جریان الکتریکی	آمپر	A
شدت روشنایی	کَندِلا (شمع)	cd

۲) یکای کمیت‌های اصلی، یکای اصلی نامیده می‌شود و به صورت مستقل از سایر یکاها تعریف می‌شود. این تعریف باید به گونه‌ای باشد که تغییرناپذیر بوده و قابلیت بازتولید در مکان‌های مختلف را داشته باشد. در مقابل، یکای کمیت‌های فرعی، یکای فرعی نامیده می‌شود و براساس یکاهای اصلی تعریف می‌شود، بنابراین باید بتوانیم یکاهای فرعی را برحسب یکاهای اصلی بنویسیم.

۳) کمیت‌های فیزیکی علاوه بر اصلی و فرعی بودن، به گونهٔ دیگری نیز تقسیم‌بندی می‌شوند. کمیت‌ها به دو دستهٔ نرده‌ای (اسکالر) و برداری تقسیم می‌شوند.

کمیت‌های فیزیکی

- نرده‌ای ← برای نمایش آن‌ها فقط به یک عدد و یکای آن‌ها نیاز داریم. جرم، طول، زمان، شدت جریان الکتریکی و فشار نمونه‌هایی از کمیت‌های نرده‌ای هستند.
- برداری ← علاوه بر مقدار و یکا، جهت نیز دارند و از قوانین جمع برداری پیروی می‌کنند. جابه‌جایی، سرعت، شتاب و ... نمونه‌هایی از کمیت‌های برداری هستند.

بررسی موارد:

الف) این عبارت درست است.

دقت وسایل مدرج، کوچک‌ترین درجه‌بندی آن‌ها است. خط‌کش میلی‌متری، کمینهٔ درجه‌بندی‌اش ۱mm است؛ پس دقت بیشتری از خط‌کش سانتی‌متری دارد و می‌تواند فواصل کمتر از یک سانتی‌متری را با دقت بیشتری اندازه‌گیری کند.

ب) این عبارت درست است.

چون برگ یک جسم سبک و با سطح زیاد است، پس نیروی مقاومت هوا را نمی‌توان نادیده گرفت. در مدل‌سازی باید اثرهای جزئی را نادیده گرفت. در سقوط برگ، بخاطر کوچک بودن نیروی وزن جسم نسبت به نیروی مقاومت هوا، نمی‌توان از نیروی مقاومت هوا چشم‌پوشی کرد.

پ) قسمت اول عبارت درست است و هر کمیت اشاره شده از کمیت‌های اصلی می‌باشند، اما یکای جرم نادرست بیان شده و یکای جرم در SI برابر kg است.

ت) مقدار ماده را با واحد مول نشان می‌دهند.

برای نمادگذاری علمی باید مقدار موردنظر به صورت $(x\times۱۰^{n})$ که $۱\le x<۱۰$ و n عددی صحیح است، نوشته شود.

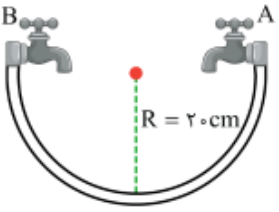
$$۰/۰۰۲۵\,mol = ۲/۵\times۱۰^{-۳}\,mol$$

این عبارت نادرست است.

ث) قسمت اول عبارت درست است، اما جریان الکتریکی کمیتی نرده‌ای است. این عبارت نادرست است.

فقط عبارت‌های (الف) و (ب) صحیح هستند، پس گزینهٔ ۳ جواب تست است.

۳۶ در شکل زیر با استفاده از شیرهای آب A و B، می‌توانیم ظرفی به شکل نیمکره را پر کنیم. شیر A به تنهایی در مدت ۶۴s و شیر B به تنهایی در مدت ۱۲۸s ثانیه، ظرف را پر می‌کنند. کدام‌یک از عبارت‌های زیر صحیح هستند؟ ($\pi \simeq 3$)



الف: اگر هر دو شیر با هم باز شوند، ظرف در مدت ۳۲s پر می‌شود.

ب: شیر A با آهنگ ۰/۲۵ لیتر بر ثانیه، ظرف را پر می‌کند.

ج: آهنگ خروج آب از شیر B، $125\frac{cm^3}{s}$ بیشتر از آهنگ خروج آب از شیر A است.

د: هنگامی که ظرف با استفاده از شیر A در حال پر شدن است، آهنگ افزایش ارتفاع سطح مایع در ظرف به تدریج کاهش می‌یابد.

۱) فقط «ب» ۲) «ب» و «د» ۳) فقط «ج» ۴) «الف» و «ج»

پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ ترکیبی ـ ۱۰۰۱)

آهنگ تغییرات

آهنگ یک کمیت یعنی تغییرات آن کمیت در واحد زمان

وقتی گفته می‌شود آهنگ خروج آب از یک شلنگ، $\frac{0/5\,Lit}{s}$ است یعنی در هر ثانیه، ۰/۵ لیتر آب از شلنگ خارج می‌شود.

مثال:

گیاهی در مدت ۱۵ روز به اندازه ۳/۶ متر رشد می‌کند. آهنگ رشد این گیاه برحسب $\frac{mm}{h}$ چقدر است؟

$$\text{آهنگ رشد} = \frac{\text{مقدار رشد}}{\text{زمان رشد}} = \frac{3/6m}{15day} = \frac{3/6m}{15day} \times \frac{1000mm}{1m} \times \frac{1day}{24h} = 10\frac{mm}{h}$$

مثال:

از یک شیر آب در هر دقیقه ۱۰۰ قطره آب چکه می‌کند. اگر حجم هر قطره آب $0/2cm^3$ باشد، آهنگ خروج آب از شیر چند $\frac{cm^3}{s}$ است؟

$$\text{حجم آب خارج شده در ۱ دقیقه} = 100 \times 0/2cm^3 = 20cm^3$$

$$\text{آهنگ خروج آب} = \frac{\text{حجم آب}}{\text{زمان}} = \frac{20cm^3}{60s} = \frac{1}{3}\frac{cm^3}{s}$$

پاسخ تشریحی:

حجم نیم‌کره برابر است با:

$$V_{\text{نیم‌کره}} = \frac{2}{3}\pi R^3 \simeq 2 \times 20^3 = 16000cm^3$$

شیر A در مدت ۶۴s ظرف را پر می‌کند، پس آهنگ خروجی آب از آن برابر است با:

$$\text{آهنگ خروج آب از A} = \frac{V}{t_A} = \frac{16000}{64} = 250\frac{cm^3}{s} = 0/25\frac{Lit}{s}$$

شیر B در مدت ۱۲۸s ظرف را پر می‌کند، پس آهنگ خروج آب از آن برابر است با:

$$\text{آهنگ خروج آب از B} = \frac{V}{t_A} = \frac{16000}{128} = 125\frac{cm^3}{s} = 0/125\frac{Lit}{s}$$

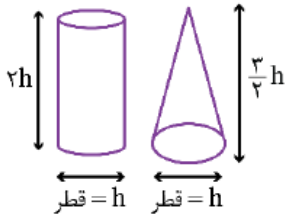
بنابراین آهنگ خروج آب از شیر B، $0/125\frac{cm^3}{s}$ کمتر از آهنگ خروج آب از شیر A است.

حال اگر دو شیر را با هم باز کنیم، آب با آهنگ $250+125=375\frac{cm^3}{s}$ ظرف را پر می‌کند و زمان پر شدن ظرف برابر است با:

$$t = \frac{16000}{375} = \frac{128}{3}s \simeq 42/67s$$

بنابراین تا این‌جا فهمیدیم که عبارت (ب) صحیح است و عبارت‌های (الف) و (ج) نادرست هستند. برای عبارت (د)، دقت کنید که به تدریج با پر شدن ظرف و بالا آمدن آب در آن، سطح مقطع ظرف افزایش می‌یابد، بنابراین سطح آب آرام‌تر در ظرف بالا می‌آید و عبارت (د) صحیح است.

۳۷ مطابق شکل زیر، چگالی استوانهٔ توپر ۲ برابر چگالی مخروط توپر است. جرم مخروط چند برابر جرم استوانه است؟



۱) ۸

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) ۴

۴) $\frac{۱}{۸}$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۱)

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۱)

چگالی

جرم واحد حجم جسم را چگالی می‌نامند و از ویژگی‌های یک ماده است و با ρ نشان می‌دهند.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

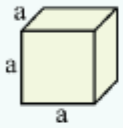
یکای SI چگالی $\frac{kg}{m^۳}$ است اما اغلب از $\frac{g}{cm^۳}$ نیز استفاده می‌شود، $۱\frac{g}{cm^۳} = ۱۰۰۰\frac{kg}{m^۳}$

برای مقایسهٔ چگالی دو جسم می‌توان از رابطهٔ روبرو استفاده کرد:

$$\frac{\rho_۲}{\rho_۱} = \frac{m_۲}{m_۱} \times \frac{V_۱}{V_۲}$$

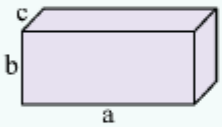
برخی مواقع در مورد چگالی اجسام با شکل هندسی مشخص، مثل کره، مکعب، مخروط و ... سؤال پرسیده می‌شود، به همین دلیل روابط محاسبهٔ حجم اجسام هندسی را به یاد داشته باشید.

مکعب



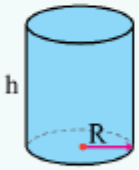
$V = a^۳$

مکعب مستطیل



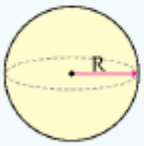
$V = abc$

استوانه



$V = \pi R^۲ h$

کره



$V = \frac{۴}{۳}\pi R^۳$

مخروط

$V = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h$

پاسخ تشریحی:

از رابطهٔ چگالی، می‌توان جرم را بدست آورد.

$$\rho=\frac{m}{V}\rightarrow m=\rho V\rightarrow \frac{m_2}{m_1}=\frac{\rho_2}{\rho_1}\times\frac{V_2}{V_1}$$

مخروط را جسم (۲) و استوانه را جسم (۱) در نظر می‌گیریم. طبق صورت سؤال: $\rho_1=2\rho_2$

برای حجم استوانه و مخروط داریم:

$$\text{استوانه } V=\pi R^2h=\pi\frac{h^2}{4}\times 2h=\frac{\pi}{2}h^3=V_1$$

$$\text{مخروط } V=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{1}{3}\pi\times\frac{h^2}{4}\times\frac{3}{2}h=\frac{\pi}{8}h^3=V_2$$

خواستهٔ سؤال نسبت جرم مخروط به جرم استوانه است.

$$\frac{m_2}{m_1}=\frac{\rho_2V_2}{\rho_1V_1}=\frac{\rho_2}{2\rho_2}\times\frac{\frac{\pi}{8}h^3}{\frac{\pi}{2}h^3}=\frac{1}{8}$$

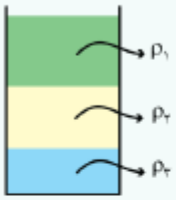
دقت کنید که چون سطح مقطع مخروط و استوانه هر دو دایره می‌باشد و قطرها برابر هستند، می‌توانستیم نتیجه بگیریم مساحت قاعده برابری دارند.

$A_1=A_2$

۳۸ جعبه‌ای به جرم ۲۰۰ گرم دارای حجم ۱۲۰۰ سانتی‌متر مکعبی است. حداقل چند مکعب ۱۰ گرمی داخل آن قرار بدهیم و در جعبه را محکم ببندیم تا اگر جعبه را داخل ظرفی حاوی روغن قرار دهیم، جعبه کاملاً در روغن فرو رود و ته‌نشین شود؟ (چگالی روغن ۸۰۰ گرم بر لیتر است. فرض کنید روغن به درون جعبه نفوذ نمی‌کند.)

۱) ۹۶ ۲) ۷۶ ۳) ۷۷ ۴) ۹۷

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ مفهومی و محاسباتی ـ ۱۰۰۱)



مقایسه چگالی

اگر چند مایع مخلوط نشدنی داشته باشیم و آن‌ها را در یک ظرف بریزیم، ماده‌ای که چگالی بیشتری دارد، پایین‌تر قرار می‌گیرد.

پس در ظرف روبرو چگالی ρ_3 بیشتر از ρ_2 و ρ_2 نیز بیشتر از ρ_1 است. $\rho_3>\rho_2>\rho_1$

به همین ترتیب اگر جسمی چگالی بیشتر از مایع داشته باشد، آن جسم در مایع فرو می‌رود و اگر چگالی آن‌ها برابر باشد، جسم در مایع غوطه‌ور می‌ماند.

پاسخ تشریحی:

چون جعبه و مکعب‌های داخل آن قرار است به داخل روغن فرو بروند باید چگالی آن‌ها بیشتر از چگالی روغن باشد. چگالی روغن $800\frac{g}{L}$ است که معادل $0/8\frac{g}{cm^3}$ می‌باشد.

$$\text{چگالی جعبه}=\frac{m_{\text{جعبه}}+m_{\text{مکعب‌ها}}}{\text{حجم جعبه}}=\frac{200+(10\times n)}{1200}>0/8\Rightarrow 200+10n>1200\times 0/8=960\rightarrow 10n>760\rightarrow n>76$$

پس حداقل باید ۷۷ عدد مکعب در جعبه گذاشته شود.

اگر...

اگر در سوال پرسیده بود جعبه را از مایعی با چگالی ρ پر می‌کنیم تا جعبه در روغن فرو برود، چگالی مایع کدام گزینه برحسب $\frac{g}{cm^3}$ می‌تواند باشد؟

۱) ۰/۶۴ ۲) ۰/۶۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۵

$$\rho_{\text{جعبه+مایع داخل آن}}<\rho_{\text{روغن}}\rightarrow\frac{200+(\rho_{\text{مایع}}\times 1200)}{1200}<0/8$$

$$\rho_{\text{مایع}}\times 1200<760\rightarrow\rho_{\text{مایع}}<0/63\frac{g}{cm^3}$$

بنابراین چگالی مایع می‌تواند برابر $۰/۶۵\frac{g}{cm^۳}$ باشد.(گزینهٔ ۲)

گروه آموزشی ماز

۳۹ **اگر گلوله‌ای فلزی را درون ظرفی لبریز از مایع A بیندازیم، ۱۰۰ گرم مایع بیرون می‌ریزد و اگر همین گلوله را درون ظرفی لبریز از مایع B بیندازیم، ۱۵۰ گرم مایع بیرون می‌ریزد. ۲۰۰ گرم از مایع A و ۹۰۰ گرم از مایع B را مخلوط می‌کنیم و با مایع به دست آمده، ظرفی را پر می‌کنیم. اگر همان گلولهٔ قبلی را درون این ظرف بیندازیم، چند سانتی‌گرم مایع از ظرف بیرون می‌ریزد؟**

۱) ۱۳۷/۵ ۲) $\frac{۱۵۵۰}{۱۱}$ ۳) ۱۳۷۵۰ ۴) $\frac{۱۵۵۰۰۰}{۱۱}$

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۱)

چگالی مخلوط

اگر چند مایع با همدیگر مخلوط شوند به نحوی که تغییر حجمی در حین مخلوط شدن صورت نگیرد، چگالی مخلوط از رابطه $\rho=\frac{m_۱+m_۲+...}{V_۱+V_۲+...}$ بدست می‌آید.

اگر در سؤالی، چگالی و حجم مواد را بدانیم، کافی است از رابطهٔ $m=\rho V$ در رابطهٔ بالا استفاده کنیم.

$$\rho_{مخلوط}=\frac{m_۱+m_۲}{V_۱+V_۲}\xrightarrow[m_۲=\rho_۲V_۲]{m_۱=\rho_۱V_۱}\rho_{مخلوط}=\frac{\rho_۱V_۱+\rho_۲V_۲}{V_۱+V_۲}$$

اگر در سؤالی چگالی و جرم مواد را بدانیم، کافی است از رابطهٔ $V=\frac{m}{\rho}$ در رابطهٔ بالا استفاده کنیم.

$$\rho_{مخلوط}=\frac{m_۱+m_۲}{V_۱+V_۲}\xrightarrow[V_۲=\frac{m_۲}{\rho_۲}]{V_۱=\frac{m_۱}{\rho_۱}}\rho_{مخلوط}=\frac{m_۱+m_۲}{\frac{m_۱}{\rho_۱}+\frac{m_۲}{\rho_۲}}$$

تست تجربی خارج ۱۴۰۱:

درون یک لیتر آب، چند سانتی‌متر مکعب الکل بریزیم تا چگالی مخلوط، ۱۰ درصد بیشتر از چگالی الکل شود؟ (چگالی آب و الکل به ترتیب $۱\frac{g}{cm^۳}$ و $۰/۸\frac{g}{cm^۳}$ است)

۱) ۸۰۰ ۲) ۱۲۰۰ ۳) ۱۵۰۰ ۴) ۱۸۰۰

پاسخ: گزینه ۳

چون صحبتی از جرم نشده، پس در رابطه چگالی مخلوط بجای جرم از حاصل‌ضرب ρV استفاده می‌کنیم.

$$\rho_{مخلوط}=\frac{\rho_۱V_۱+\rho_۲V_۲}{V_۱+V_۲}$$

چگالی الکل $۰/۸\frac{g}{cm^۳}$ است و چگالی مخلوط باید ۱۰ درصد بیشتر باشد (یعنی $\rho_{مخلوط}=۱/۱\rho_{الکل}=۰/۸۸\frac{g}{cm^۳}$).

$$V_{آب}=۱L=۱۰۰۰cm^۳\ ,\ V_{الکل}=?\ ,\ \rho_{آب}=۱\frac{g}{cm^۳}\ ,\ \rho_{الکل}=۰/۸\frac{g}{cm^۳}$$

$$۰/۸۸=\frac{(۱\times۱۰۰۰)+(۰/۸\times V_{الکل})}{۱۰۰۰+V_{الکل}}$$

$$۱۰۰۰+۰/۸V_{الکل}=۸۸۰+۰/۸۸V_{الکل}$$

$$۰/۰۸V_{الکل}=۱۲۰\rightarrow V_{الکل}=۱۵۰۰cm^۳$$

گام اول:

چون گلولهٔ یکسانی را درون مایع‌ها می‌اندازیم، حجم مایع بیرون ریخته شده هم یکسان است، بنابراین چون جرم بیرون ریخته از B، ۱/۵ برابر جرم بیرون ریخته از A است، چگالی مایع B هم ۱/۵ برابر چگالی مایع A است. با توجه به این توضیحات، اگر چگالی A برابر $\rho_A=\rho$ باشد، چگالی B برابر $\rho_B=۱/۵\rho$ است.

گام دوم:

چگالی مخلوط دو مایع برابر است با:

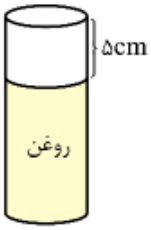
$$\rho_{\text{مخلوط}}=\frac{m_A+m_B}{\frac{m_A}{\rho_A}+\frac{m_B}{\rho_B}}=\frac{۲۰۰+۹۰۰}{\frac{۲۰۰}{\rho}+\frac{۹۰۰}{۱/۵\rho}}=\frac{۱۱}{۸}\rho$$

گام سوم:

برای محاسبهٔ جرم مایع بیرون ریخته شده در حالت سوم، می‌توان نوشت:

$$m=\rho V\rightarrow\frac{m_{\text{مخلوط}}}{m_A}=\frac{\rho_{\text{مخلوط}}}{\rho_A}\times\frac{V_{\text{گلوله}}}{V_{\text{گلوله}}}\rightarrow\frac{m_{\text{مخلوط}}}{۱۰۰}=\frac{\frac{۱۱}{۸}\rho}{\rho}\times۱\rightarrow m_{\text{مخلوط}}=۱۳۷/۵g=۱۳۷۵۰cg$$

۴۰ **فلزی با چگالی ۶ گرم بر میلی‌لیتر را به آرامی در ظرفی استوانه‌ای حاوی روغن با مساحت قاعده $۵cm^۲$ فرو می‌بریم. اگر ۱۶ گرم روغن از ظرف بیرون بریزد، جرم فلز چند گرم از جرم روغن موجود در استوانه بیشتر است؟ (در ابتدا $\frac{۱}{۱۳}$ ظرف خالی می‌باشد و چگالی روغن ۸۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب می‌باشد.)**



۱) ۱۳۰

۲) ۶۰

۳) ۲۴۰

۴) ۳۰

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۰۰۱)

پاسخ تشریحی:

ابتدا چگالی‌ها را به واحد $\frac{g}{cm^۳}$ تبدیل می‌کنیم.

$$\rho_{\text{فلز}}=۶\frac{g}{mL}=۶\frac{g}{cm^۳}$$

$$\rho_{\text{روغن}}=۸۰۰\frac{kg}{m^۳}=۰/۸\frac{g}{cm^۳}$$

چون $\frac{۱}{۱۳}$ ظرف خالی است یعنی ارتفاع کل ظرف برابر با $۱۳\times۵cm=۶۵cm$ است، پس $۶۰cm$ از ظرف حاوی روغن است. جرم روغن موجود در ظرف را بدست می‌آوریم.

$$m_{\text{روغن}}=\rho V=\rho Ah=۰/۸\times۵\times۶۰=۲۴۰g$$

برای بدست آوردن جرم فلز، باید حجم آن را بدست آوریم.

برای تعیین حجم فلز باید مشخص شود که چه حجم روغنی جابجا شده است.

چون ۱۶ گرم روغن از ظرف بیرون ریخته شده پس وقتی فلز را داخل ظرف انداخته‌ایم، ابتدا روغن حجم خالی داخل ظرف را پر کرده $(۵\times۵=۲۵cm^۳)$ و سپس به اندازه V' بیرون ریخته شده است.

$$V'_{\text{روغن بیرون ریخته شده}}=\frac{m_{\text{روغن بیرون ریخته شده}}}{\rho_{\text{روغن}}}=\frac{۱۶}{۰/۸}=۲۰cm^۳$$

پس حجم $۲۵+۲۰=۴۵cm^۳$ از روغن جابجا شده که این حجم برابر با حجم فلز است.

$$V_{\text{فلز}}=۴۵cm^۳$$

$$m_{\text{فلز}}=\rho V=۶\times۴۵=۲۷۰g$$

$$m_{\text{فلز}}-m_{\text{روغن}}=۲۷۰-۲۴۰=۳۰g$$

۴۱ با توجه به جدول زیر، چه تعداد از مطالب داده شده درست هستند؟ (نماد عناصر داده شده، فرضی هستند.)

	گروه ۱	گروه ۲	گروه ۱۴	گروه ۱۵	گروه ۱۶	گروه ۱۷
دوره سوم	–	D	W	R	–	X
دوره چهارم	M	–	–	Z	E	Y
دوره پنجم	L	G	–	–	–	–

آ: قدر مطلق بار یون حاصل از عنصر Y، ۲ برابر بار یون حاصل از عنصر D است.

ب: واکنش میان عناصر L و X، شدیدتر از واکنش میان عناصر G و R خواهد بود.

پ: نسبت شمار نوترون‌ها به پروتون‌ها در اتم ^{۴۳}M بیشتر از این نسبت در اتم ^{۷۷}Y است.

ت: عنصر Z نسبت به عنصر E خصلت فلزی بیشتر و نسبت به عنصر R خصلت نافلزی کمتری دارد.

ث: عنصر W دارای ۴ الکترون ظرفیتی بوده و از جمله عناصری است که در ساختار همه مواد آلی یافت می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ مفهومی و حفظی ـ ۱۱۰۱)

پاسخ تشریحی:

جدول مورد نظر به صورت زیر است:

	گروه ۱	گروه ۲	گروه ۱۴	گروه ۱۵	گروه ۱۶	گروه ۱۷
دوره سوم		Mg	Si	P		Cl
دوره چهارم	K			As	Se	Br
دوره پنجم	Rb	Sr				

با توجه به عناصر داده شده، عبارت‌های (ب)، (پ) و (ت) درست هستند.

بررسی موارد:

آ: عناصر داده شده معادل با برم و منیزیم هستند. عناصر موجود در گروه ۱۷، آنیون‌هایی با بار ۱- و عناصر گروه دوم نیز کاتیون‌هایی با بار ۲+ تشکیل می‌دهند. بر این اساس، می‌توان گفت یون تک اتمی عناصر برم و منیزیم به ترتیب Br^- و Mg^{2+} است.

ب: در جدول تناوبی، خصلت نافلزی و در نتیجه واکنش‌پذیری عناصر نافلزی از بالا به پایین و از راست به چپ کاهش می‌یابد؛ پس واکنش‌پذیری عنصر Cl از عنصر P بیشتر است. همچنین خصلت فلزی و یا به عبارت دیگر واکنش‌پذیری فلزها در جدول تناوبی از راست به چپ و از بالا به پایین افزایش می‌یابد؛ بنابراین واکنش‌پذیری عنصر Rb بیشتر از عنصر Sr است. با توجه به توضیحات داده شده، می‌توان گفت واکنش انجام‌شده میان عناصر واکنش‌پذیرتر(روبیدیم و کلر) شدیدتر خواهد بود.

پ: شمار نوترون‌ها و پروتون‌ها و نسبت نوترون‌ها به پروتون‌ها در اتم‌های $^{۴۳}_{۱۹}K$ و $^{۷۷}_{۳۵}Br$ برابر است با:

$$^{۴۳}_{۱۹}K \begin{cases} n = A - Z \Rightarrow n = ۴۳ - ۱۹ = ۲۴ \\ p = Z \Rightarrow p = ۱۹ \end{cases} \Rightarrow B = \frac{n}{p} = \frac{۲۴}{۱۹} \simeq ۱/۲۶$$

$$^{۷۷}_{۳۵}Br \begin{cases} n = A - Z \Rightarrow n = ۷۷ - ۳۵ = ۴۲ \\ p = Z \Rightarrow p = ۳۵ \end{cases} \Rightarrow B = \frac{n}{p} = \frac{۴۲}{۳۵} = ۱/۲$$

ت: در جدول تناوبی خصلت فلزی از بالا به پایین و از راست به چپ افزایش می‌یابد؛ پس خصلت فلزی عنصر As نسبت به عنصر Se بیشتر است. در جدول دوره‌ای خصلت نافلزی از پایین به بالا و از چپ به راست افزایش می‌یابد؛ پس عنصر As نسبت به عنصر P خصلت نافلزی کمتری دارد.

خواص فلزات:

بیشتر عنصرهای جدول دوره‌ای را فلزها تشکیل می‌دهند. این عناصر به طور عمده در سمت چپ و مرکز جدول قرار دارند. رفتارهای شیمیایی عناصر فلزی به میزان تمایل اتم‌های سازنده‌ی آن‌ها به از دست دادن الکترون وابسته است. بر این اساس، هرچه اتم‌های سازنده‌ی یک عنصر فلزی راحت‌تر الکترون از دست بدهند، آن عنصر خصلت فلزی بیشتری داشته و واکنش‌پذیری بالاتری دارد.

خواص این عناصر به شرح زیر است:

۱- فلزها در حالت جامد دارای سطحی صیقلی، براق و درخشان بوده و پرتوهای نور تابیده شده به سمت خود را بازتاب می‌کنند.

۲- عناصر فلزی در حالت جامد چکش‌خوار و شکل‌پذیر بوده و براثر ضربه‌ی چکش خرد نمی‌شوند.

۳- فلزها رسانایی الکتریکی و گرمایی بالایی داشته و جریان برق و گرما را از خود عبور می‌دهند. به همین خاطر از آن‌ها در تهیه‌ی سیم‌ها استفاده می‌شود.

۴- اغلب فلزها استحکام بالایی داشته و به همین خاطر، از آن‌ها برای ساختن ظروف آشپزخانه، پل‌های فلزی و ... استفاده می‌شود.

۵- اتم‌های سازنده‌ی اغلب فلزها تمایل دارند در واکنش‌های شیمیایی یک یا چند الکترون از دست داده و به یون‌هایی با بار مثبت(کاتیون) تبدیل شوند.

ث: عنصر سیلیسیم، به صورت معمول در ساختار ترکیب‌های آلی یافت نمی‌شود. توجه داریم که در ساختار مواد آلی، عناصر کربن و هیدروژن همواره وجود دارند. کربن، متعلق به تناوب دوم و گروه چهاردهم است.

۴۲ چه تعداد از مقایسه‌های زیر، درست‌اند؟

- **فرّاریت: ۳-اتیل هپتان < ۳-اتیل پنتان**
- **گرانروی: نفت سفید < گازوئیل**
- **چسبندگی: وازلین > گریس**
- **واکنش‌پذیری: پروپان > پروپن**
- **شمار اتم‌های H در مولکول: بوتان > ۲-هگزین**

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۱)

پاسخ تشریحی:

بجز موارد چهارم و پنجم، سایر مقایسه‌های داده شده به درستی انجام شده‌اند.

در رابطه با آلکان‌ها، به نکات زیر توجه کنید:

۱- آلکان‌ها، موادی ناقطبی با گشتاور دوقطبی تقریبا برابر با صفر($\mu = 0$) هستند؛ در نتیجه با افزایش تعداد اتم‌های کربن در ساختار آلکان‌ها، نیروهای جاذبهٔ بین مولکولی آن‌ها قوی‌تر شده و نقطهٔ جوش این مواد افزایش می‌یابد. توجه داریم که فرّاریت با نقطه جوش رابطهٔ عکس دارد. از این رو، می‌توان گفت با افزایش تعداد اتم‌های کربن در آلکان‌ها، مقدار فرّاریت آن‌ها کاهش می‌یابد.

۲- گرانروی یک مایع، مقاومت آن مایع را در برابر جاری شدن نشان می‌دهد. چهار جزء اصلی تشکیل‌دهنده نفت خام یعنی نفت کوره، گازوئیل، نفت سفید و در نهایت بنزین و خوراک پتروشیمی هستند که مقایسه اندازهٔ مولکول‌ها در آن‌ها و گرانروی آن‌ها به صورت زیر است:

مقایسه اندازه مولکول‌ها: نفت کوره > گازوئیل > نفت سفید > بنزین و خوراک پتروشیمی

گرانروی: نفت کوره > گازوئیل > نفت سفید > بنزین و خوراک پتروشیمی

توجه داریم که بین اندازه مولکول‌های اجزای تشکیل دهنده نفت خام و میزان گرانروی آن‌ها، رابطهٔ مستقیم وجود دارد.

۳- چسبندگی یک مایع با گرانروی آن رابطهٔ مستقیم دارد؛ بنابراین با افزایش تعداد اتم‌های کربن در ساختار آلکان‌ها، چسبندگی آن‌ها افزایش پیدا می‌کند.

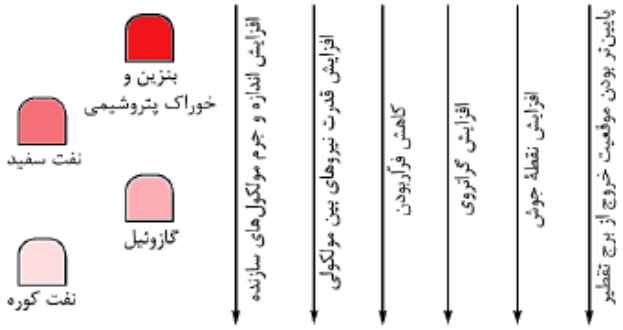
۴- واکنش‌پذیری هیدروکربن‌های هم‌کربن(ترکیب‌هایی که تعداد اتم کربن برابر دارند) را می‌توان به صورت زیر مقایسه کرد:

مقایسه واکنش‌پذیری: آلکان > آلکن > آلکین

بررسی موارد:

مورد اول: هر دو ترکیب داده شده در این مورد، آلکان هستند. در ساختار ۳-اتیل هپتان و ۳-اتیل پنتان، به ترتیب ۹ و ۷ اتم کربن وجود دارد. بنابراین میزان فرآریت ۳-اتیل پنتان با تعداد اتم کربن کمتر، بیشتر از ترکیب دیگر است.

مورد دوم: اندازه مولکول‌ها در گازوئیل نسبت به نفت سفید بزرگ‌تر است. بر این اساس، گرانروی گازوئیل نسبت به نفت سفید بیشتر خواهد بود. تصویر زیر، ویژگی‌های مختلف اجزای سازنده نفت خام را در مقایسه با یکدیگر نشان می‌دهد:



تقطیر جزء به جزء نفت خام:

پس از استخراج نفت خام، نمک‌ها، اسیدها و آب موجود در این ماده را از آن جدا کرده و مخلوط باقیمانده را وارد پالایشگاه می‌کنند. در پالایشگاه، با استفاده از فرایند تقطیر جزءبه‌جزء، هیدروکربن‌های موجود در نفت خام را به صورت مخلوط‌هایی با نقطه جوش نزدیک به‌هم جدا می‌کنند. برای انجام فرایند تقطیر جزءبه‌جزء، نفت خام را ابتدا درون محفظه بزرگی(کوره) گرما داده و آن را به سمت برج تقطیر هدایت می‌کنند. در برج تقطیر، دما با حرکت از سمت پایین به سمت بالا کاهش پیدا کرده و جنبش مولکول‌ها کمتر می‌شود. هنگامی که نفت خام داغ به قسمت پایین برج وارد می‌شود، مولکول‌های سبک‌تر و فرارتر(موادی که نقطه‌ی جوش پایین‌تری دارند) از جمله مواد پتروشیمیایی، از مایع بیرون آمده و به سوی بالای برج حرکت می‌کنند. به تدریج که این مولکول ها بالاتر می‌روند، سرد شده و به مایع تبدیل می‌شوند و در سینی‌هایی که در فاصله‌های گوناگون برج قرار دارند وارد شده و از برج خارج می‌شوند. با انجام این فرایند، مخلوط‌هایی با نقطه جوش نزدیک به هم از نفت خام جداسازی می‌شوند. برای مثال، بنزین، نفت سفید، گازوئیل و نفت کوره، از جمله اجزای سازنده نفت خام هستند که به کمک برج تقطیر از یکدیگر جدا می‌شوند.

مورد سوم: فرمول مولکولی تقریبی وازلین و گریس به ترتیب $C_{۲۵}H_{۵۲}$ و $C_{۱۸}H_{۳۸}$ است، بنابراین میزان چسبندگی وازلین بیشتر از گریس است.

مورد چهارم: پروپان و پروپن هم‌کربن هستند و همانطور که می‌دانیم، واکنش‌پذیری آلکن‌ها از آلکان‌های هم‌کربن با آن‌ها، بیشتر است.

مورد پنجم: در ساختار هر مولکول بوتان و ۲-هگزین، تعداد ۱۰ اتم هیدروژن وجود دارد.

گروه آموزشی ماز

۴۳ **کدام‌یک از عبارت‌های داده شده نادرست است؟**

۱) از میان دو عنصر فلزی روی و مس، استخراج فلزی با پتانسیل کاهشی بیشتر، توسط گیاهان صرفه اقتصادی بیشتری دارد.

۲) اولین عنصری که در دسته d جدول تناوبی قرار می‌گیرد، در آرایش الکترونی خود ۶ زیرلایه پر از الکترون دارد.

۳) فلزات، جزء منابع تجدیدپذیر طبیعت بوده و طی فرایند خوردگی به سنگ معدن خود تبدیل می‌شوند.

۴) غلظت گونه‌های فلزی موجود در کف اقیانوس‌ها نسبت به ذخایر زمینی آن‌ها بیشتر است.

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی و حفظی ـ ۱۱۰۱)

پاسخ تشریحی:

فلزها طی فرآیند فرسایش و خوردگی که فرآیندی کند است، به سنگ معدن خود تبدیل می‌شوند. در نتیجه آهنگ بازگشت فلز به طبیعت بسیار کند بوده و به همین علت فلزها جزء منابع تجدیدناپذیر هستند. فرایند انجام شده به صورت زیر است:

... ← سنگ معدن فلز ← خوردگی و فرسایش ← فلز ← استخراج فلز ← سنگ معدن فلز

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) مس و روی، دو عنصر از دوره چهارم جدول دوره‌ای هستند که به ترتیب در گروه‌های ۱۱ و ۱۲ جدول جای گرفته‌اند. فلز روی، واکنش‌پذیری بیشتری داشته و پتانسیل کاهشی استاندارد آن در مقایسه با مس منفی‌تر(کمتر) است. استخراج فلزات به کمک گیاهان که گیاه‌پالایی نامیده می‌شود برای دو عنصر مس و طلا مقرون به صرفه است و برای دو عنصر نیکل و روی صرفه اقتصادی ندارد.

استخراج فلزات با استفاده از گیاهان:

یکی از روش‌های بیرون کشیدن فلزها از لابه‌لای خاک استفاده از گیاهان(گیاه پالایی) است. به این منظور در معدن یا خاک دارای فلز، گیاهانی را می‌کارند که می‌توانند آن فلز را جذب کنند؛ سپس گیاه را برداشت کرده، می‌سوزانند و از خاکستر حاصل از آن فلز را جداسازی می‌کنند. درصد فلز روی در سنگ معدن بیشتر از درصد فلز روی در یک کیلوگرم گیاه است، لذا روش گیاه پالایی برای فلز روی مناسب نیست. از طرفی، درصد فلز نیکل در سنگ معدن کمتر از درصد فلز نیکل در یک کیلوگرم گیاه است، با این حال استخراج نیکل نیز با این روش به علت قیمت کم نیکل صرفه اقتصادی ندارد. درصد فلزهای مس و طلا در سنگ معدن کمتر از درصد این فلزها در یک کیلوگرم گیاه است و همچنین این دو فلز قیمت بالایی نیز دارند؛ به همین علت استفاده از گیاهان برای استخراج این دو فلز صرفه اقتصادی بیشتری نسبت به استخراج آن‌ها از سنگ معدن دارد.

۲ اولین عنصری از جدول تناوبی که در دسته d قرار می‌گیرد، اسکاندیم($_{۲۱}Sc$) است. این عنصر در گروه شماره ۳ قرار گرفته است. آرایش الکترونی اسکاندیم به صورت $[_{۱۸}Ar]۳d^{۱}۴s^{۲}$ است. در آرایش الکترونی این عنصر، ۶ زیرلایه پر از الکترون و یک زیرلایه تک‌الکترونی وجود دارد. این ماده در ساختار برخی وسایل خانه مانند تلویزیون‌رنگی و برخی شیشه‌ها وجود دارد.

۴ غلظت بیشتر گونه‌های فلزی موجود در کف اقیانوس نسبت به ذخایر زمینی، بهره‌برداری از این منابع در آینده را نوید می‌دهد. امروزه شرکت‌هایی از برخی کشورها طرح‌های استخراج این مواد را از بستر اقیانوس‌ها در دست دارند. پیش‌بینی می‌شود اکتشاف و بهره‌برداری از منابع شیمیایی بستر دریا به یکی از صنایع کلیدی و تأثیرگذار در روابط کشورها تبدیل شود.

گنج‌های اعماق دریا:

به دلیل نیاز روزافزون جهان به مواد شیمیایی و کاهش میزان منابع این مواد در سنگ‌کره، شیمی‌دان‌ها به دنبال منابع تازه برای استخراج این مواد می‌گردند. به عنوان مثال، بستر اقیانوس‌ها منبع بزرگی از منابع فلزی گوناگون به شمار می‌رود که انسان به تازگی آن را کشف کرده است. این منبع عظیم، در برخی مناطق محتوی سولفید چندین فلز واسطه و در برخی از مناطق دیگر، محتوی کلوخه‌ها و پوسته‌هایی غنی از فلزهایی مانند منگنز، کبالت، آهن، نیکل و مس است. غلظت اغلب گونه‌های فلزی موجود در کف اقیانوس، نسبت به ذخایر زمینی این فلزها بیشتر است.

۴۴ نمونه‌هایی به جرم برابر از ۲-بوتین و اتان در اختیار داریم. اگر تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن موجود در ساختار این دو ماده برابر با $۲/۴۰۸ \times ۱۰^{۲۴}$ عدد باشد، بر اثر سوختن نمونه اتان، چند لیتر گاز کربن دی‌اکسید در شرایط استاندارد تولید می‌شود؟

$(C = ۱۲ \text{ و } H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۲۲/۴ ۲) ۳۳/۶ ۳) ۴۴/۸ ۴) ۶۷/۲

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ مساله ـ ۱۱۰۱)

پاسخ تشریحی:

بوتین، سومین عضو خانواده آلکین‌ها و اتان، دومین عضو خانواده آلکان‌ها است. جرم نمونه‌های ۲-بوتین($C_۴H_۶$) و اتان($C_۲H_۶$) را برابر با x در نظر گرفته و شمار اتم‌های هیدروژن موجود در هر ماده را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{نمونه اتان: } ?\,H \text{ اتم} = x\,g\,C_۲H_۶ \times \frac{۱\,mol\,C_۲H_۶}{۳۰\,g\,C_۲H_۶} \times \frac{۶\,mol\,H}{۱\,mol\,C_۲H_۶} \times \frac{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}\,H \text{ اتم}}{۱\,mol\,H} = \frac{۶/۰۲x \times ۱۰^{۲۳}}{۵} \text{ اتم}$$

$$\text{نمونه بوتین: } ?\,H \text{ اتم} = x\,g\,C_۴H_۶ \times \frac{۱\,mol\,C_۴H_۶}{۵۴\,g\,C_۴H_۶} \times \frac{۶\,mol\,H}{۱\,mol\,C_۴H_۶} \times \frac{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}\,H \text{ اتم}}{۱\,mol\,H} = \frac{۶/۰۲x \times ۱۰^{۲۳}}{۹} \text{ اتم}$$

بر این اساس، داریم:

$$\text{تعداد اتم‌های هیدروژن در نمونه بوتین} - \text{تعداد اتم‌های هیدروژن در نمونه اتان} = ۲/۴۰۸ \times ۱۰^{۲۴} \Longrightarrow$$

$$\frac{۶/۰۲x \times ۱۰^{۲۳}}{۵} - \frac{۶/۰۲x \times ۱۰^{۲۳}}{۹} = ۲/۴۰۸ \times ۱۰^{۲۴} \Longrightarrow x = ۴۵\,g$$

گاز اتان بر اساس معادله‌ی $۲C_۲H_۶(g) + ۷O_۲(g) \rightarrow ۴CO_۲(g) + ۶H_۲O(l)$ به طور کامل می‌سوزد. بر این اساس، داریم:

$$?\,L\,CO_۲ = ۴۵\,g\,C_۲H_۶ \times \frac{۱\,mol\,C_۲H_۶}{۳۰\,g\,C_۲H_۶} \times \frac{۲\,mol\,CO_۲}{۱\,mol\,C_۲H_۶} \times \frac{۲۲/۴\,L\,CO_۲}{۱\,mol\,CO_۲} = ۶۷/۲\,L$$

۴۵ **کدام‌یک از عبارت‌های داده شده نادرست است؟**

۱) ۵ مورد از اتم‌های کربن موجود در هر مولکول ۳-اتیل-۳،۲-دی‌متیل پنتان، به سه اتم H متصل شده‌اند.

۲) آلکانی که از آن برای پر کردن فندک استفاده می‌شود، در دما و فشار اتاق به حالت گاز دیده می‌شود.

۳) در شرایط یکسان، نقطه جوش یک نمونه گریس، کمتر از نقطه جوش وازلین خواهد بود.

۴) ساده‌ترین عضو خانواده آلکان‌های شاخه‌دار، در ساختار خود دارای ۵ اتم کربن است.

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۱)

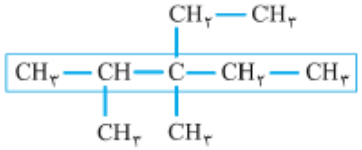
پاسخ تشریحی:

ساده‌ترین آلکان شاخه‌دار، یک زنجیره کربنی اصلی ۳ تایی دارد که یک شاخه فرعی متیل به آن متصل شده است. تصویر مقابل، نمایی از ساده‌ترین آلکان شاخه‌دار را نشان می‌دهد:

این ترکیب آلکانی ۲-متیل پروپان نام داشته و در هر مولکول آن ۴ اتم کربن وجود دارد. فرمول مولکولی ۲-متیل پروپان(یا همان متیل پروپان)، به صورت C_4H_{10} خواهد بود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

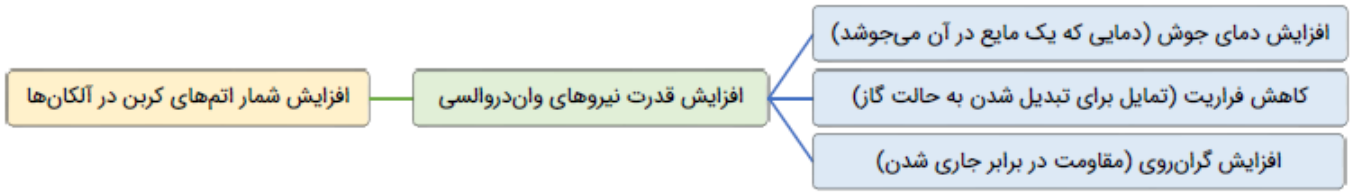
۱) ساختار آلکان مورد نظر به صورت زیر است:



در آلکان مورد نظر، اتم‌های کربن موجود در دو انتهای زنجیره کربنی اصلی و اتم‌های کربنی که در انتهای هر شاخه فرعی قرار می‌گیرند، به سه اتم هیدروژن و یک اتم کربن متصل شده‌اند.

۲ بوتان، آلکانی است که از آن برای پر کردن فندک‌ها استفاده می‌شود. نقطه جوش، معادل با دمایی است که در آن یک مایع شروع به جوشیدن کرده و به بخار تبدیل می‌شود. با بیشتر شدن تعداد اتم‌های کربن موجود در آلکان‌ها(n)، قدرت نیروهای وان‌دروالسی در این مواد افزایش پیدا کرده و دمای جوش آن‌ها نیز افزایش می‌یابد. با توجه به نمودار کتاب درسی، دمای جوش آلکان‌ها با شمار اتم‌های کربن موجود در ساختار آن‌ها رابطه مستقیم دارد. بر این اساس، دمای جوش چهار عضو اول خانواده آلکان‌ها(متان، اتان، پروپان و بوتان)، کمتر از $0^\circ C$ است، پس این مواد در دماهای بالاتر از $-0^\circ C$(از جمله دمای اتاق که معادل با $22^\circ C$ است) به حالت گاز(g) دیده می‌شوند. در نقطه مقابل، آلکان‌هایی که شمار اتم‌های کربن موجود در ساختار آن‌ها ۵ عدد یا بیشتر از ۵ عدد است، در دمای اتاق به حالت مایع(l) دیده می‌شوند.

۳ هرچه شمار اتم‌های کربن در آلکانی راست‌زنجیر بیشتر باشد، نقطه جوش آن بیشتر است. وازلین (با فرمول تقریبی $C_{25}H_{52}$)، نقطه جوش بیشتری نسبت به گریس (با فرمول تقریبی $C_{18}H_{38}$) دارد. نمودار زیر برخی از خواص آلکان‌ها را بر حسب افزایش تعداد اتم‌های کربن در آن‌ها نشان می‌دهد:



گروه آموزشی ماز

۴۶ **جرم یک مخلوط ۲۵ گرمی از گازهای ۲-بوتن و متان، پس از واکنش با بخار برم به اندازه ۱۶۰ درصد افزایش پیدا می‌کند. بر اثر سوزاندن گاز متان موجود در مخلوط نهایی، چند لیتر گاز کربن دی‌اکسید در شرایط استاندارد تولید خواهد شد؟**

$(Br = ۸۰ \text{ و } C = ۱۲ \text{ و } H = ۱ : \ g.mol^{-۱})$

۱) ۱۵/۴ ۲) ۳۰/۸ ۳) ۷/۹ ۴) ۲۳/۷

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مساله ـ ۱۱۰۱)

پاسخ تشریحی:

هیدروکربن‌های سیرشده که شامل آلکان‌ها و سیکلوآلکان‌ها می‌شوند، با محلول برم، بخارآب و گاز هیدروژن واکنش نمی‌دهند اما آلکن‌ها و آلکین‌ها به علت سیرنشده بودن، می‌توانند با این مواد واکنش داده و به ترکیبی سیرشده تبدیل شوند.

واکنش کلی آلکن‌ها و آلکین‌ها با گاز هیدروژن و محلول برم به صورت زیر است:

آلکن‌ها : $C_nH_{2n} + H_2 \xrightarrow{Ni} C_nH_{2n+2}$ و $C_nH_{2n} + Br_2 \longrightarrow C_nH_{2n}Br_2$

آلکین‌ها : $C_nH_{2n-2} + 2H_2 \xrightarrow{Ni} C_nH_{2n+2}$ و $C_nH_{2n-2} + 2Br_2 \longrightarrow C_nH_{2n-2}Br_4$

همانطور که گفتیم، آلکان‌ها به علت سیرشده بودن با بخار برم و یا گاز هیدروژن واکنش نمی‌دهند، بنابراین از بین مواد اولیه موجود در این نمونه گازی، تنها ۲-بوتن موجود در مخلوط با بخار برم واکنش می‌دهد در حالی که گاز متان به صورت دست نخورده باقی می‌ماند. با توجه به اینکه جرم مخلوط گازی به اندازه ٪۱۶۰ افزایش پیدا کرده و از ۲۵ گرم به ۶۵ گرم رسیده است، پس می‌توان گفت که تفاوت جرم ایجاد شده مربوط به بخار برم مصرف شده است. از توضیحات داده‌شده می‌توان نتیجه گرفت در واکنش ۲-بوتن با بخار برم، مقدار ۴۰ گرم بخار برم مصرف شده است. معادله موازنه‌شده واکنش میان ۲-بوتن با بخار برم به صورت زیر است:

$$C_4H_8(g) + Br_2(g) \longrightarrow C_4H_8Br_2\ (l)$$

حال مقدار ۲-بوتن مصرف‌شده را به ازای مصرف ۴۰ گرم بخار برم حساب می‌کنیم:

$$?\,g\ C_4H_8 = 40\ g\ Br_2 \times \frac{1\ mol\ Br_2}{160\ g\ Br_2} \times \frac{1\ mol\ C_4H_8}{1\ mol\ Br_2} \times \frac{56\ g\ C_4H_8}{1\ mol\ C_4H_8} = 14g$$

با توجه به محاسبات انجام شده، مقدار گاز ۲-بوتن موجود در مخلوط برابر با ۱۴ گرم است. پس مقدار گاز متان موجود در این مخلوط گازی ۲۵ گرمی برابر با ۱۱ گرم خواهد بود. در مرحله بعد مقدار گاز کربن دی‌اکسید تولیدشده بر اثر سوختن ۱۱ گرم گاز متان را بدست می‌آوریم. معادله موازنه‌شده سوختن گاز متان در دمای اتاق به صورت زیر است:

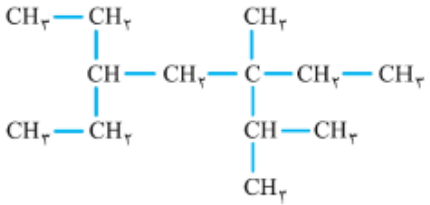
$$CH_4(g) + 2O_2(g) \rightarrow CO_2(g) + 2H_2O(l)$$

هر مول گاز در شرایط استاندارد، حجمی معادل ۲۲/۴ لیتر دارد. بر این اساس، داریم:

$$L\ CO_2 = 11\ g\ CH_4 \times \frac{1\ mol\ CH_4}{16\ g\ CH_4} \times \frac{1\ mol\ CO_2}{1\ mol\ CH_4} \times \frac{22/4\ L\ CO_2}{1\ mol\ CO_2} = 15/4L$$

بنابراین بر اثر سوزاندن گاز متان موجود در مخلوط نهایی، ۱۵/۴ لیتر گاز کربن دی‌اکسید در شرایط استاندارد تولید خواهد شد.

۴۷ **ترکیبی با ساختار زیر را در نظر بگیرید:**



نام این ترکیب بر اساس قواعد آیوپاک به چه صورت بوده و شمار پیوندهای اشتراکی موجود در ساختار این ماده، چند برابر شمار پیوندهای اشتراکی در مولکول دی‌نیتروژن مونوکسید است؟

۱) ۵،۳-دی‌اتیل-۳،۲-دی‌متیل هپتان | ۱۰
۲) ۵،۳-دی‌اتیل-۳،۲-دی‌متیل هپتان | ۹
۳) ۵،۳-دی‌اتیل-۶،۵-دی‌متیل هپتان | ۱۰
۴) ۵،۳-دی‌اتیل-۶،۵-دی‌متیل هپتان | ۹

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۱۰۱)

پاسخ تشریحی:

تصویر داده شده در صورت سوال، نوعی آلکان شاخه‌دار را نشان می‌دهد. توجه داریم که اگر در آلکان‌ها، یک یا چند زنجیره جانبی به زنجیره کربنی اصلی متصل شود، یک آلکان شاخه‌دار بدست می‌آید. در ساختار یک آلکان n کربنه، مجموعا $3n+1$ پیوند اشتراکی وجود دارد. آلکان مورد نظر، دارای ۱۳ اتم کربن در ساختار خود بوده بر این اساس، می‌توان گفت این ترکیب مجموعا شامل ۴۰ پیوند اشتراکی می‌شود. در رابطه با شمار انواع پیوندهای اشتراکی موجود در خانواده‌های مختلف از هیدروکربن‌ها، داریم:

هیدروکربن	فرمول	پیوند $C-C$	پیوند $C=C$	پیوند $C\equiv C$	پیوند کربن-کربن	پیوند $C-H$	کل پیوندها
آلکان	C_nH_{2n+2}	$n-1$	-	-	$n-1$	$2n+2$	$3n+1$
آلکن	C_nH_{2n}	$n-2$	۱	-	n	$2n$	$3n$
آلکین	C_nH_{2n-2}	$n-2$	-	۱	$n+1$	$2n-2$	$3n-1$

در ساختار مولکول دی‌نیتروژن مونوکسید(N_2O)، ۴ پیوند اشتراکی بین اتم‌ها برقرار شده است. ساختار این ماده به صورت زیر است:

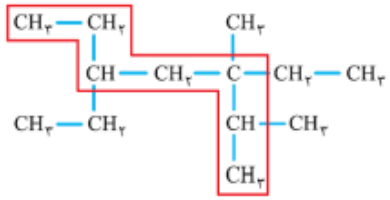
$$:N \equiv N - \ddot{O}:$$

بر این اساس، داریم:

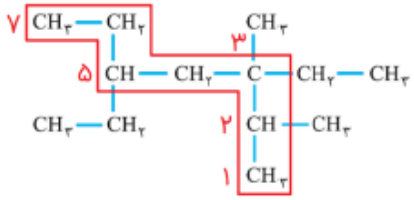
$$\frac{\text{شمار پیوندهای اشتراکی در } C_{۱۳}H_{۲۸}}{\text{شمار پیوندهای اشتراکی در } N_۲O} = \frac{۴۰}{۴} = \text{برابر } ۱۰$$

بخش عمده هیدروکربن‌های موجود در نفت خام را آلکان‌ها تشکیل می‌دهند. آلکان‌ها جز هیدروکربن‌های سیرشده بوده و تمایل چندانی به انجام واکنش‌های شیمیایی ندارند. در آلکان‌ها همه پیوندهای موجود در بین اتم‌ها یگانه هستند. در اغلب موارد، از آلکان‌ها در واکنش سوختن استفاده می‌شود. عنصر اصلی سازنده نفت خام کربن است. این عنصر دارای ۶ پروتون در هسته خود بوده و دارای ۴ الکترون در لایه ظرفیت خود است. این اتم رفتارهای منحصر به فردی دارد که آن را از اتم دیگر عنصرهای جدول دوره‌ای متمایز می‌سازد؛ به طوری که ترکیب‌های شناخته شده از اتم کربن، از مجموع ترکیب‌های شناخته شده از دیگر عناصر جدول دوره‌ای بیشتر است.

برای نام‌گذاری ترکیب مورد نظر، در قدم اول باید زنجیره کربنی اصلی را پیدا کنیم. برای انتخاب زنجیره کربنی اصلی، باید به دنبال زنجیره‌ای از اتم‌های کربن بگردیم که بیشترین تعداد اتم C ممکن را در خود جای داده باشد و تعداد زنجیره‌های جانبی متصل به آن نیز حداکثر مقدار ممکن باشد. زنجیره اصلی کربنی در ترکیب داده شده به صورت زیر خواهد بود:



در قدم بعد، باید زنجیره کربنی موجود در ساختار این ترکیب را شماره‌گذاری کنیم. شماره‌گذاری اتم‌های کربن موجود در زنجیره اصلی را از سمتی آغاز می‌کنیم که به اولین شاخه فرعی نزدیک‌تر باشد. چون از سمت راست، اولین شاخه فرعی بر روی کربن شماره ۲ از ترکیب مورد نظر قرار می‌گیرد، پس شماره‌گذاری را از سمت راست آغاز می‌کنیم. در این حالت، داریم:



برای مشخص کردن نام هر آلکان، ابتدا نام شاخه‌های جانبی(آلکیل) و شماره اتم‌کربنی از زنجیره‌ی اصلی که این شاخه‌ها به آن متصل شده‌اند را بیان کرده و پس از آن، نام آلکان مربوط به زنجیره اصلی را می‌آوریم. برای مثال، زنجیره اصلی این ترکیب دارای ۷ اتم کربن است، پس نام این آلکان به ((هپتان)) ختم خواهد شد. با توجه به توضیحات داده شده، نام آلکان مورد نظر به صورت ۵،۳-دی‌اتیل-۳،۲-دی‌متیل هپتان می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۴۸ **کدام‌یک از عبارت‌های داده شده درست است؟**

۱) با ورود گاز اتن در مخلوط آب و اسید در شرایط مناسب، ترکیبی زرد رنگ و فرار ایجاد می‌شود که محلول در آب است.

۲) تعداد اتم H در چهارمین عضو خانواده سیکلوآلکان‌ها، ۲/۴ برابر تعداد اتم C در چهارمین عضو خانواده آلکن‌ها است.

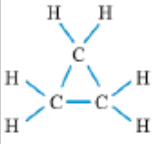
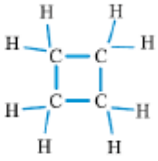
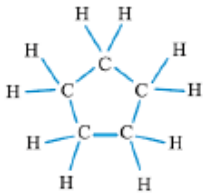
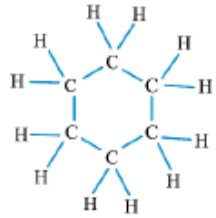
۳) آلکین‌ها واکنش‌پذیری بالایی داشته و از یکی از اعضای خانواده آن‌ها به نام اتیلن در جوش کاربیدی کاربرد دارد.

۴) مولکول اوکتان مجموعا دارای ۲۵ پیوند اشتراکی در ساختار خود بوده و یک نمونه از آن، فرارتر از هگزان است.

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۱)

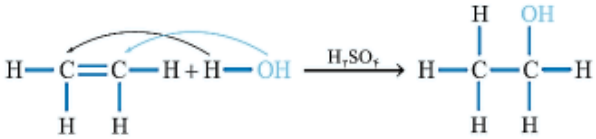
پاسخ تشریحی:

چهارمین عضو خانواده سیکلوآلکان‌ها با فرمول C_6H_{12}، ۱۲ اتم H و چهارمین عضو خانواده آلکن‌ها با فرمول C_5H_{10}، ۵ اتم C داشته و نسبت موردنظر برابر با $\frac{12}{5} = 2/4$ است. توجه داریم که فرمول اولین عضو خانواده سیکلوآلکان‌ها و اولین عضو خانواده آلکن‌ها به ترتیب C_3H_6 و C_2H_4 است. جدول زیر، نمایی از چهار عضو اول خانواده سیکلوآلکان‌های بدون شاخه را نشان می‌دهد:

فرمول مولکولی	C_3H_6	C_4H_8	C_5H_{10}	C_6H_{12}
نام	سیکلوپروپان	سیکلوبوتان	سیکلوپنتان	سیکلوهگزان
ساختار				

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) گاز اتن(C_2H_4) سنگ بنای صنایع پتروشیمی است. در این صنایع، با استفاده از گاز اتن حجم انبوهی از مواد و فراورده‌های گوناگون تولید می‌شود. با ورود آلکن‌ها به مخلوط آب و اسید، مولکول‌های آب به یک اتم هیدروژن($-H$) و یک گروه $-OH$ شکسته شده و به پیوند دوگانه‌ی موجود در ساختار آلکن‌ها افزوده می‌شوند. به عنوان مثال، واکنش اتن با آب به صورت زیر است:



فراورده این واکنش اتانول است. اتانول(C_2H_5OH) یک ترکیب سیرشده است که بر اثر تخمیر بی‌هوازی مولکول‌های گلوکز نیز تولید می‌شود. این الکل، مایعی بی‌رنگ و فرار بوده و به هر نسبتی در آب حل می‌شود.

۳) به گروهی از هیدروکربن‌ها که در ساختار آن‌ها یک پیوند سه‌گانه‌ی کربن-کربن($C \equiv C$) وجود دارد، آلکین گفته می‌شود. فرمول کلی اعضای خانواده آلکین‌ها به صورت C_nH_{2n-2} بوده و حداقل مقدار n در آن برابر با ۲ است. آلکین‌ها واکنش‌پذیری بالایی داشته و از یکی از اعضای خانواده آن‌ها به نام استیلن(یا همان اتین) در جوش کاربیدی استفاده می‌شود.

۴) فرمول مولکولی اوکتان به صورت C_8H_{18} است. با توجه به فرمول مولکولی این ماده، می‌توان گفت هر مولکول اوکتان مجموعا دارای ۲۵ پیوند اشتراکی در ساختار خود است. چون اوکتان در مقایسه با هگزان تعداد اتم‌های کربن بیشتری دارد، پس یک نمونه از این ماده، فراریت کمتری نسبت به هگزان خواهد داشت. توجه داریم که به تمایل مولکول‌های سازنده یک مایع برای تبخیر شدن(تبدیل شدن به حالت گاز)، فراریت گفته می‌شود. با افزایش شمار اتم‌های کربن موجود در آلکان‌ها(n)، مولکول‌های سازنده‌ی این مواد با قدرت بیشتری به یکدیگر چسبیده و به همین خاطر، میزان فراریت آن‌ها کاهش می‌یابد.

۴۹ نوعی هیدروکربن سیرشده، در ساختار مولکولی خود دارای ۴ حلقه کربنی است. اگر شمار اتم‌های هیدروژن در این ماده ۱/۴ برابر شمار اتم‌های کربن باشد، در ساختار هر مولکول از این ماده چند پیوند اشتراکی وجود داشته و برای تولید ۰/۲ مول گاز کربن دی‌اکسید، چند گرم از این ماده را باید به طور کامل سوزاند؟ $(H = ۱ : g.mol^{-۱}$ و $C = ۱۲)$

۱) ۲۷ - ۲/۶۸ ۲) ۲۵ - ۲/۶۸ ۳) ۲۷ - ۲/۷۶ ۴) ۲۵ - ۲/۷۶

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مساله ـ ۱۱۰۱)

پاسخ تشریحی:

در صورت سوال، نوعی هیدروکربن سیرشده به ما معرفی شده است که در ساختار مولکولی خود دارای ۴ حلقه کربنی است. شمار اتم‌های کربن موجود در ساختار این ماده را برابر با n در نظر می‌گیریم. با توجه به سیرشده بودن این ماده، می‌توان گفت در ساختار مولکولی آن هیچ پیوند دوگانه یا سه‌گانه‌ای وجود ندارد. بر این اساس، در رابطه با شمار اتم‌های هیدروژن موجود در ساختار این ماده داریم:

$$\text{تعداد } H = \left(۲ \times \text{تعداد } C + ۲\right) - ۲ \times \left(\text{تعداد حلقه} + \text{تعداد دوگانه}\right) - ۴ \times \left(\text{تعداد سه‌گانه}\right) = (۲n + ۲) - (۴ \times ۲) = ۲n - ۶$$

فرمول شیمیایی هیدروکربن مورد نظر به صورت $C_nH_{۲n-۶}$ می‌شود. طبق فرض سوال، شمار اتم‌های هیدروژن در این ماده ۱/۴ برابر شمار اتم‌های کربن است. بر این اساس، داریم:

$$\frac{\text{شمار اتم } H}{\text{شمار اتم } C} = ۱/۴ \Rightarrow \frac{۲n - ۶}{n} = ۱/۴ \Rightarrow n = ۱۰$$

با توجه به محاسبه مقدار n، می‌توان گفت فرمول شیمیایی این ترکیب هیدروکربنی به صورت $C_{۱۰}H_{۱۴}$ است. در قدم بعد، شمار پیوندهای اشتراکی موجود در ساختار این ماده را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{پیوند اشتراکی} = \frac{\text{تعداد اتم هیدروژن} \times ۱ + \text{تعداد اتم کربن} \times ۴}{۲} = \frac{(۱۰ \times ۴) + (۱۴ \times ۱)}{۲} = ۲۷ \text{ پیوند}$$

در ساختار ترکیب مورد نظر، ۱۰ اتم کربن وجود دارد. بر این اساس، می‌توان گفت به ازای سوختن هر مول از این ماده، ۱۰ مول گاز کربن دی‌اکسید به عنوان فراورده تولید می‌شود. بر این اساس، داریم:

$$?\, g\ C_{۱۰}H_{۱۴} = ۰/۲\ mol\ CO_۲ \times \frac{۱\ mol\ C_{۱۰}H_{۱۴}}{۱۰\ mol\ CO_۲} \times \frac{۱۳۴\ g\ C_{۱۰}H_{۱۴}}{۱\ mol\ C_{۱۰}H_{۱۴}} = ۲/۶۸\ g$$

۵۰ چه تعداد از عبارت‌های زیر درست هستند؟ $(H = 1 : g.mol^{-1}$ و $C = 12)$

آ: در شرایط یکسان، چگالی یک نمونه از گاز متان، ۳/۵ برابر چگالی یک نمونه خالص از گاز ۲-بوتن است.

ب: با افزایش درصد یک گاز ناقطبی در هوای معادن زغال‌سنگ، احتمال وقوع انفجار در معادن افزایش پیدا می‌کند.

پ: همه اکسیدهای تولید شده بر اثر سوختن مقداری زغال سنگ، با انحلال در آب یک محلول اسیدی ایجاد می‌کند.

ت: نفت خام به رنگ سیاه یا قهوه‌ای متمایل به سبز بوده و در ساختار همه مواد سازنده آن اتم‌های C و H وجود دارند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی و حفظی ـ ۱۱۰۱)

پاسخ تشریحی:

فقط عبارت (ب) درست است.

بررسی موارد:

آ: در شرایط یکسان از نظر دما و فشار محیط، چگالی گازهای مختلف، با جرم مولی این گازها رابطه مستقیم دارد. به عنوان مثال، اگر جرم مولی یک گاز ۲ برابر جرم مولی یک گاز دیگر باشد، چگالی این گاز نیز ۲ برابر گاز دیگر می‌شود. بر این اساس، داریم:

$$\frac{\text{چگالی متان}}{\text{چگالی بوتن}} = \frac{\text{جرم مولی متان}}{\text{جرم مولی بوتن}} = \frac{۱۶}{۵۶} \simeq ۰/۲۸$$

ب: متان، گازی سبک، بی‌بو و بی‌رنگ است که از مولکول‌های ناقطبی ساخته شده است. این گاز، اولین عضو خانواده آلکان‌ها بوده و فرمول مولکولی آن به صورت CH_4 است. زغال سنگ، گاز متان را از خود آزاد می‌کند. این گاز می‌تواند باعث ایجاد انفجار در معادن شود. اگر غلظت متان در هوای معدن به بیش از ۵ درصد برسد، احتمال انفجار در معدن مورد نظر وجود دارد. بدیهی است هرچه غلظت گاز متان در هوای معدن بالاتر باشد، احتمال انفجار نیز بیشتر خواهد بود. بر این اساس، غلظت گاز متان در هوای معدن باید به طور پیوسته اندازه‌گیری و کنترل شده و با استفاده از تهویه مناسب و قوی، غلظت این گاز در هوای معدن کاهش پیدا کند.

پ: زغال‌سنگ، همانند نفت خام و بنزین، از جمله سوخت‌های فسیلی است. برآوردها نشان می‌دهد که ذخایر زغال سنگ تا ۵۰۰ سال آینده توانایی رفع نیازهای بشر را دارند؛ درحالی که طبق برآوردهای انجام شده برای نفت خام، منابع این سوخت فسیلی تا ۱۰۰ سال آینده به پایان می‌رسند. بر این اساس، زغال‌سنگ می‌تواند به عنوان سوخت، جایگزین نفت خام شود.

جدول زیر، اطلاعات مختلف زغال‌سنگ را در مقایسه با بنزین نشان می‌دهد:

نام سوخت	گرمای آزادشده (kJ / g)	فراورده‌های سوختن	مقدار CO_2 به ازای هر کیلوژول انرژی تولیدشده (g)
بنزین	۴۸	CO_2 ،CO ،H_2O	۰/۰۶۵
زغال‌سنگ	۳۰	SO_2 ،CO_2 ،NO_2 ،CO ،H_2O	۰/۱۰۴

کربن مونوکسید، از جمله اکسیدهای تولید شده در واکنش سوختن زغال‌سنگ است که خاصیت اسیدی نداشته و با انحلال در آب، pH محیط را تغییر نمی‌دهد. در واقع، گاز کربن مونوکسید به صورت مولکولی در آب حل شده و هیچ یونی را در محلول تولید نمی‌کند.

آثار استخراج زغال سنگ:

چون بر اثر سوختن زغال‌سنگ آلاینده‌های متنوع‌تر و بیشتری تولید می‌شود، در صورت جایگزینی نفت با زغال‌سنگ، مقدار بیشتری از انواع آلاینده‌ها به هواکره وارد شده و این امر، باعث تشدید اثر گلخانه‌ای می‌شود. علاوه بر این، آلاینده‌های مورد نظر منجر به تولید باران‌های اسیدی شده و به محیط زیست آسیب می‌رسانند. مشکل دیگر زغال‌سنگ، شرایط دشوار استخراج آن است؛ به طوری که در صد سال اخیر، بیش از ۵۰۰۰۰۰ نفر در سطح جهان بر اثر انفجار یا فروریختن معدن جان خود را از دست داده‌اند. این انفجارها اغلب به دلیل تجمع گاز متان(CH_4) آزاد شده از زغال سنگ در معدن رخ می‌دهد. برای کاهش آلایندگی زغال‌سنگ، از روش‌های زیر استفاده می‌شود:

- ✓ شست وشوی زغال سنگ به منظور حذف گوگرد و ناخالصی های دیگر از آن.
- ✓ به دام انداختن گاز SO_2 خارج شده از نیروگاه‌ها با عبور گازهای خروجی از روی کلسیم اکسید و با استفاده از واکنش زیر:

$$SO_2(g) + CaO(s) \rightarrow CaSO_3(s)$$

ت: نفت خام، مخلوطی از انواع هیدروکربن‌ها، برخی از نمک‌ها، اسیدها، آب و ... است. البته مقدار نمک و اسید در نفت خام کم بوده و در نفت حاصل از نواحی گوناگون نیز متغیر است. آلکان‌ها بخش عمده‌ای از هیدروکربن‌های موجود در نفت خام را تشکیل داده و به دلیل واکنش‌پذیری کم، اغلب به عنوان سوخت(در خودروها، هواپیما، در کارخانه‌ها و ...) به‌کار می‌روند. همانطور که می‌دانیم، در ساختار آب و اغلب اسیدها اتم کربن وجود ندارد.

کاربرد نفت سفید:

حمل و نقل هوایی، سریع‌ترین حالت حمل و نقل بوده و مزایای آن شامل عدم نیاز به جاده سازی و تعمیرات آن، مسافرت آسان و خدمات رسانی خوب در مواقع اضطراری می‌شود. سوخت هواپیما طی پالایش نفت خام در برج‌های تقطیر پالایشگاه‌ها تولید می‌شود. این سوخت به طور عمده از نفت سفید تهیه می‌شود. نفت سفید، شامل آلکان‌هایی می‌شود که در ساختار آن‌ها ۱۰ الی ۱۵ عدد اتم کربن وجود دارد. توجه داریم که یکی از مسائل مهم در تأمین سوخت، انتقال آن به مراکز توزیع و استفاده آن است. در حدود ۶۶ درصد از فرایند انتقال سوخت به کمک خطوط لوله و بقیه‌ی آن با استفاده از راه آهن، نفتکش جاده‌پیما و کشتی‌های نفتی انجام می‌شود.